LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 17 mars 2020 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematisk tabellsamling (TEFYMA eller motsvarande), institutionens formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas så fort som möjligt via kursens hemsida (avanonymiserat). Rapporteringen i Ladok blir fördröjd denna läsperiod.

1. Ett system ges av $Y(s) = G(s)U(s)$ med

$$G(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

a. Beräkna systemets poler och nollställen och sätt ut dessa i ett singularitets-diagram. (1.5 p)

b. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? (0.5 p)

c. Beräkna systemets stegsvar $y(t)$, (dvs då insignal är $u(t) = \theta(t)$). (1 p)

d. Bestäm en differentialekvation på formen (ange a och b koefficienterna)

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

som beskriver systemet för allmän insignal $u(t)$. (1 p)

Solution

a.

$$G(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{4s+5}{(s+1)(s+2)}$$

Polerna ges av $s = -1$ och $s = -2$. Nollställe finns i $s = -5/4$.

b. Polerna ligger i öppna vänstra halvplanet. Systemet är därför asymptotiskt stabilt.

c. Ett första ordningens system $\frac{b}{s+a}$ har stegsvar $y(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$. Vårt system består av en summa av två sådana system. Vi får

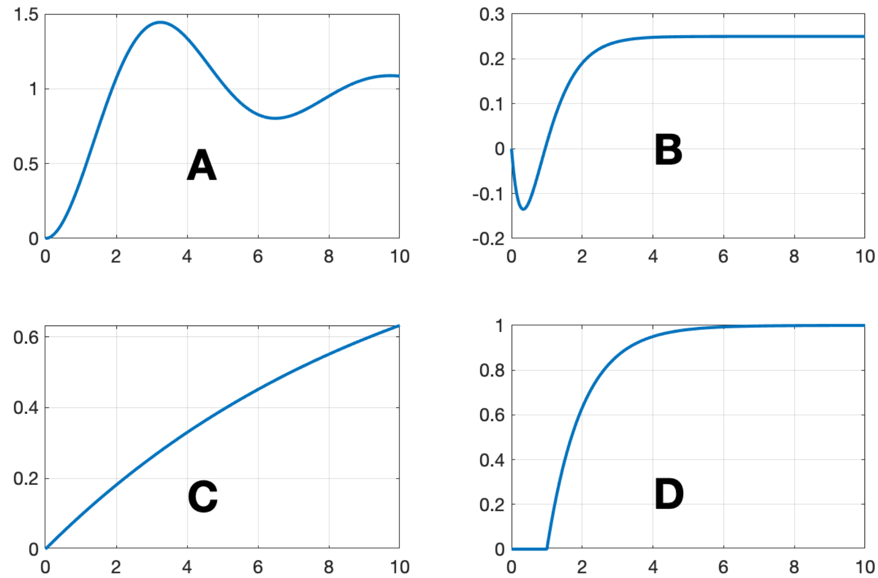
$$y(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}) + 1 - e^{-t}$$

d. Eftersom $Y(s) = \frac{4s+5}{s^2+3s+2}U(s)$ så är $(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (4s + 5)U(s)$, dvs

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4u'(t) + 5u(t)$$

2. Para ihop stegsvaren A till D i figuren nedan med överföringsfunktionerna G_1 till G_5 (en blir över). Glöm inte att motivera svaret. (2 p)

$$G_1(s) = \frac{1}{10s+1}, \qquad G_2(s) = \frac{1}{s^2+0.5s+1}, \qquad G_3(s) = \frac{e^{-s}}{s+1},$$
$$G_4(s) = \frac{10}{s+10}, \qquad G_5(s) = \frac{1-s}{(s+2)^2}$$



Figur 1 Stegsvar A-D

Solution

Alla systemen är asymptotiskt stabila. Stegsvaren har därför slutvärden som ges av $G_1(0) = G_2(0) = G_3(0) = G_4(0) = 1, G_5(0) = 0.25$. Vi ser att G_5=B.

Överföringsfunktionerna $G_1 = \frac{1}{10s+1}$ och $G_4 = \frac{10}{s+10} = \frac{1}{0.1s+1}$ är båda första ordningens system, med tidskonstant $T = 10$ sekunder, resp 0.1 sekunder. Stegsvar C har nått upp till 63 procent av slutvärdet 1 efter 10 sekunder, och därför är G_1=C, medan G_4 saknas.

G_2 är ett andra ordningens system med bandbredd 1 och dämpning 0.25, alltså stabilt men rätt så odämpat, alltså är G_2=A.

G_3 är ett första ordningens system med tidsfördröjning på 1 sekund, vilket svarar mot $G_3 = D$.

G_5 har ett nollställe $s = 1$ i höger halvplan. Det svarar mot systemet vars stegsvar går i negativ riktning initialt, dvs figur B. Detta stämmer även med den tidigare observationen om slutvärdet.

Svar: A=G_2, B=G_5, C=G_1, D=G_3, G_4 saknas. (CADXB).

3. Följande ekvationer

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(2 - x_2) - u \\ \dot{x}_2 &= -x_2(100 - x_1),\end{aligned}$$

är en dynamisk modell för populationen av bytesdjur och predatorer (t.ex. småfisk, x_1, och haj, x_2). Vi antar att man kan påverka systemet genom signalen u (t.ex. fiske).

a. Verifiera att punkten $(x_1, x_2, u) = (100, 2, 0)$ är en stationär punkt och linjärisera systemet kring denna punkt. (2 p)

b. Är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

Solution

a. Insättning av $(x_1, x_2, u) = (100, 2, 0)$ ger $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$.

$$f_1(x_1, x_2, u) = x_1(2 - x_2) - u$$
$$f_2(x_1, x_2, u) = -x_2(100 - x_1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2 - x_2,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -x_1$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1 - 100,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -1$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{1}$$

b. Nej, $\mathrm{tr}(A) = 0$, dvs. minst ett egenvärde har realdel större än eller lika med 0.

4.c. En process

$$G_p(s) = \frac{1 - s}{s^2 + 2s + 2}$$

återkopplas enkelt med en proportionell P-regulator, dvs. $Y(s) = G_p(s)U(s)$ och $U(s) = K(R(s) - Y(s))$.

a. Beräkna slutna systemets överföringsfunktion. För vilka konstanter $K > 0$ är slutna systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

b. Vad kan du säga om det stationära felet $\lim_{t\to\infty} e(t)$ vid stegändringar i referensvärdet för fallen $K = 1$ och $K = 4$? (1 p)

c. Föreslå en regulatortyp som eliminerar stationärt fel vid stegändringar i referensvärdet. (1 p)

Solution

a. Slutna systemets överföringsfunktion blir

$$\frac{G_p K}{1+G_p K} = \frac{K(1-s)}{s^2+2s+2+K(1-s)}$$

Slutna systemets karakteristiska polynom är

$$s^2+(2-K)s+2+K$$

Systemet är 2a ordningens och därför asymptotiskt stabilt om koefficienterna är postiva. Eftersom vi hade $K>0$ får vi villkoret $0<K<2$.

b. Felet ges av

$$E(s) = \frac{1}{1+KG_p(s)}R(s)$$

Slutvärdesteoremet ger, med $R(s)=1/s$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1+KG_p(0)} = \frac{1}{1+K\frac{1}{2}}$$

För $K=1$ är slutna systemet asymptotiskt stabilt och slutvärdesteoremet kan användas. Vi får då $\lim_{t\to\infty} e(t) = 2/3$

För $K=4$ är slutna systemet instabilt och slutvärde saknas.

c. En I-regulator, t.ex. $U(s) = \frac{k_i}{s}(R(s)-Y(s))$, för en välvald konstant k_i.

5. Antag att det står två vattentankar T_1 och T_2 bredvid varandra. Tankarna är identiska, förutom att utloppsarean på T_1 är större än på T_2. Utflödet från T_1 är alltså större vid varje given vattenhöjd. Tankarna har samma inflöde, som vi kan styra. Linjäriserat kring nollnivån ges då systemet av

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Här betecknar x_1 och x_2 tankarnas vattenhöjder, och u betecknar inflödet in i båda tankarna.

Vårt mål är nu att styra vattennivåerna. Detta gör vi genom att återkoppla från tillstånden, som vi antar att vi kan mäta.

a. Visa att systemet är styrbart. (1 p)

b. Designa en tillståndsåterkoppling $u=-Lx$ sådan att polerna hamnar i $s=-2\pm i$. (2 p)

c. Om vi börjar med tomma tankar så är det fysikaliskt intuitivt att T_1 aldrig kan uppnå en högre vattenhöjd än T_2: vattenförlusten är vid varje nivå större för T_1, men inflödet förblir alltid detsamma för båda tankarna. Ett sådant system är per definition inte styrbart. Varför? I deluppgift a. kom vi trots det fram till att ovanstående system var styrbart. Betyder det att vi kan uppnå $x_1>x_2$? Förklara i så fall hur.
Ledning: Utgå från definitionen av styrbarhet och fundera sedan på skillnaderna mellan modell och verklighet. (1 p)

d. Antag att man nu istället bara kan mäta höjdskillnaden mellan tankarna

$$y = [\,1 \quad -1\,]\, x$$

Är systemet observerbart? (1 p)

e. Konstruera en observerare

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

som skattar både x_1 och x_2 asymptotiskt korrekt och ger observerardynamik med karakteristiskt polynom $p(s) = (s+2)(s+1)$. (1 p)

Solution

a. Styrbarheten kan vi avgöra med hjälp av styrbarhetsmatrisen

$$W_s = (\, B \quad AB\,) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Systemet är styrbart om och endast om kolonnerna är linjärt oberoende, dvs. determinanten är skild från noll.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(-2) = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

Systemet är alltså styrbart.

b. Vi önskar nu välja ett L i styrlagen $u = -Lx$ så att slutna systemets poler hamnar i $s = -2 \pm i$. Polerna ges av egenvärdena till den nya systemmatrisen

$$A - BL = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - l_1 & -l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{pmatrix}$$

vilka fås ur det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BL)) &= \begin{vmatrix} s + 2 + l_1 & l_2 \\ l_1 & s + 1 + l_2 \end{vmatrix} = (s + 2 + l_1)(s + 1 + l_2) - l_1 l_2 \\ &= s^2 + (3 + l_1 + l_2)s + 2 + l_1 + 2l_2 \end{aligned}$$

Vår önskan är nu att detta ska vara lika med

$$\det(sI - (A - BL)) = (s + 2 + i)(s + 2 - i) = s^2 + 4s + 5$$

så att polerna hamnar där vi vill. Identifiering av koefficienter ger då att

$$\begin{aligned} 4 &= 3 + l_1 + l_2 \\ 5 &= 2 + l_1 + 2l_2 \end{aligned}$$

vilket leder till (subtrahera t.ex. den övre ekvationen från den undre)

$$\begin{aligned} l_1 &= -1 \\ l_2 &= 2 \end{aligned}$$

och $L = (\, l_1 \quad l_2\,)$ är bestämd.

c. Systemet är per definition styrbart om det för *varje* tillstånd x finns en styrsignal u som på ändlig tid tar oss från origo till x i tillståndsrummet. Men hur vi än väljer inflödet kommer vi aldrig att lyckas nå ett tillstånd sådant att vattenhöjden på T_1 är större än vattenhöjden på T_2. Alltså stämmer inte vår intuition överens med definitionen av styrbarhet.

Det som är styrbart här är det modellerade systemet, inte det verkliga systemet. I modellen finns t.ex. inga mättningar medtagna, och höjd och inflöde kan därmed bli negativa. Då kan man först "suga ut vatten till negativ höjd", sedan låta x_1 bli större än x_2 av sig själva (för negativa nivåer är $\dot{x}_1 > \dot{x}_2$), för att sedan fylla på rikligt med vatten under kort tid. På så sätt kan man uppnå $x_1 > x_2$ och därmed samtliga tillstånd i tillståndsrummet.

d. Vi har observerbarhetsmatris

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

som har determinant skild från noll. Systemet är därför observerbart. Genom att mäta nivåskillnaden kan man faktiskt få information om båda nivåerna.

e. Designekvationen $\det(sI - A + KC) = p(s)$ ger $K = 0$.

Förklaring: Dynamiken som efterfrågas är faktiskt samma som för öppna systemet. Det innebär att en simulering av systemet

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

kan användas, dvs ingen felåterkoppling behövs.

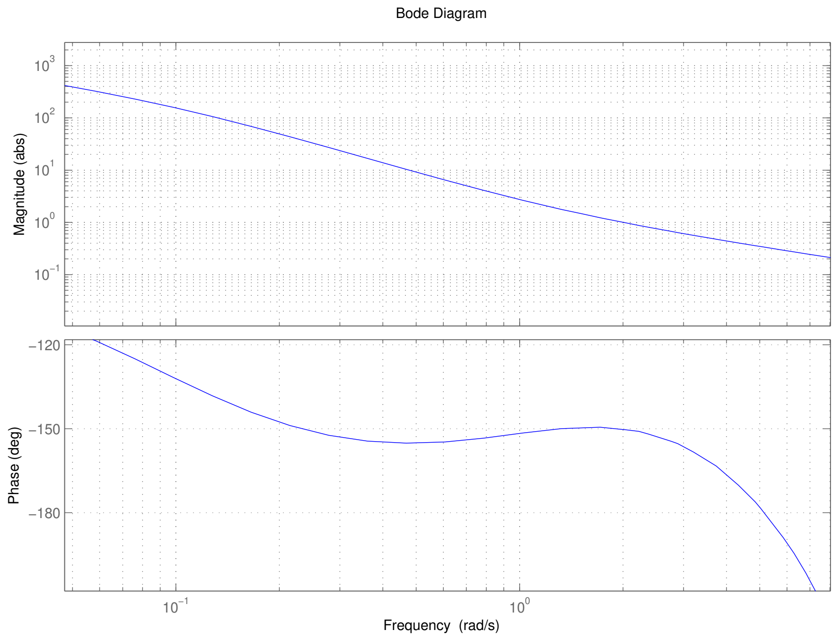
6. Du arbetar som reglertekniker och får som uppdrag att förbättra regleringen av en motor. Den nuvarande regulatorn har länge ansetts vara lite för långsam, dvs. att den inte följer referensvärdet tillräckligt snabbt. Försök har gjorts för att justera parametrarna i den nuvarande regulatorn, en PI-regulator, men har endast resulterat i ett dåligt dämpat system. Du vill därför förbättra regleringen genom att använda en lämplig kompenseringslänk, men du inser att du behöver ett bodediagram för det öppna systemet.

a. Motorn är en stabil process. Beskriv hur du med lämpliga experiment kan bestämma bodediagrammet. (1 p)

b. Du lyckas få fram ett bodediagram, se figur 2. Efter diskussioner med operatörer har du konstaterat att snabbheten på systemet bör tredubblas, dvs. skärfrekvensen ska bli 3 gånger så stor, utan att fasmarginalen förändras. Designa en kompenseringslänk som uppfyller denna specifikation. (3 p)

Solution

a. Man kan t.ex. skicka sinussignaler med varierande frekvens till systemet och mäta amplitud (ger bodediagrammets amplitudkurva) och fasförskjutning (ger bodediagrammets faskurva) på utsignalen.



Figur 2 Bodediagram för det öppna systemet i uppgift 6.

b. Den nuvarande skärfrekvensen kan i bodediagrammet läsas av till 2 rad/s och den nuvarande fasmarginalen till 30°. Den nya skärfrekvensen ska vara 3 gånger så stor som den gamla, den ska alltså vara 6 rad/s. Vid den nya skärfrekvensen har det öppna systemet en fasförskjutning på ungefär -190°, vilket innebär att kompenseringslänken måste ge ett faslyft på 40° för att fasmarginalen ska förbli oförändrad.

Eftersom skärfrekvensen ska ökas är det en fasavancerande kompenseringslänk som ska användas:

$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN}$$

Ett faslyft på 40° motsvaras då av parametern $N \approx 4.5$. Faskurvans topp vill vi ska hamna på den nya skärfrekvensen, och parametern b kan då väljas enligt $b = \frac{\omega_c^{ny}}{\sqrt{N}} = 6/\sqrt{4.5}$. Slutligen ska K_K väljas så att förstärkningen vid den nya skärfrekvensen verkligen blir 1, dvs. förstärkningen för det öppna systemet för frekvensen $\omega_c^{ny} = 6$ rad/s läses av till $|L(6i)| \approx 0.3$, där L betecknar det öppna systemet:

$$\begin{gathered}|G_K(i\omega_c^{ny})L(i\omega_c^{ny})| = 1\\ K_K\sqrt{N}|L(6i)| = 1\\ K_K\sqrt{4.5}\cdot 0.3 = 1\\ K_K = 1/(0.3\sqrt{4.5})\end{gathered}$$

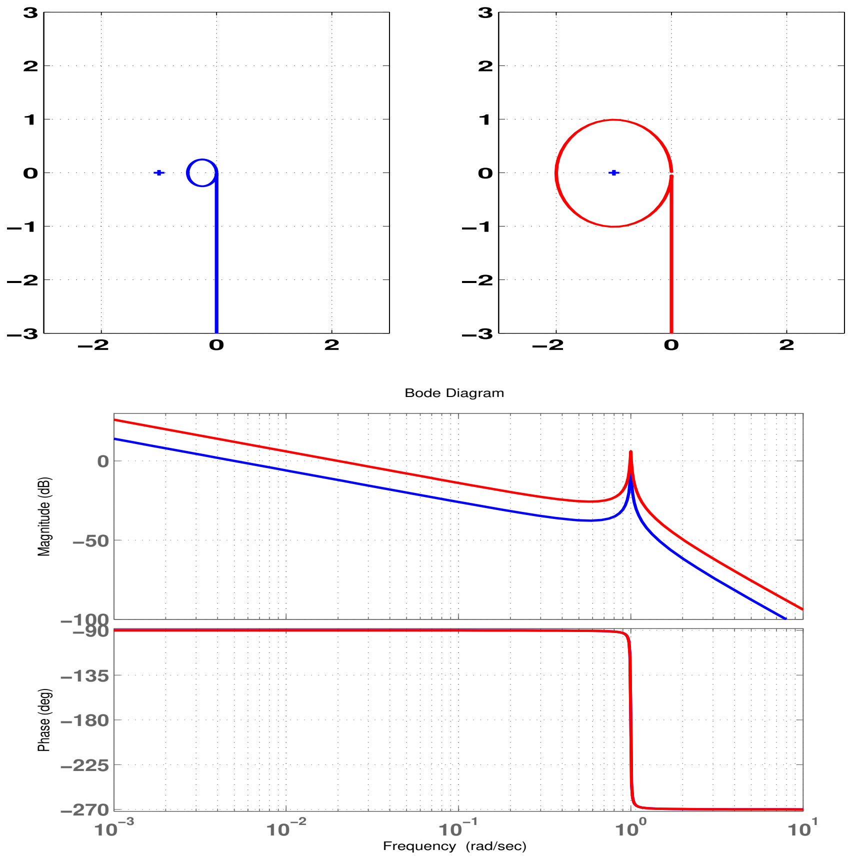
Kompenseringslänken ges alltså av:

$$G_K(s) = 1/(0.3\sqrt{4.5}) \cdot 4.5 \frac{s + 6/\sqrt{4.5}}{s + 6/\sqrt{4.5} \cdot 4.5} \approx 7.07 \cdot \frac{s + 2.83}{s + 12.73}$$

7. Ett atomkraftsmikroskop styrt av en I-regulator beskrivs av det öppna systemet

$$G_0(s) = G_R(s)G_p(s) = \frac{k_i}{s} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 \zeta s + \omega_0^2}$$

vars Nyquistkurva och Bodediagram återges i figur 7 för $\omega_0 = 1, \zeta = 0.005$ för två olika värden på k_i.



Figur 3 Nyquist- och Bodediagram för det öppna systemet i uppgift 7.

a. Visa att Nyquistkurvans skärning med negativa reella axeln ges (då $k_i > 0$) av $G_0(i\omega_0) = -\frac{k_i}{2\zeta\omega_0}$. (1 p)

b. Beräkna k_i som ger amplitudmarginal $A_m = 2$. (Du får använda informationen i uppg. a.) (1 p)

c. Antag $\omega_0 = 1, \zeta = 0.005$ som i figurerna. Vilken fasmarginal kommer man få om man bestämmer k_i så att amplitudmarginalen blir $A_m = 2$? (Avläsning i diagram duger.) (1 p)

Solution

a. Om vi stoppar in $s = i\omega_0$ ser vi att

$$G_0(i\omega_0) = \frac{k_i}{i\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{-\omega_0^2 + 2i\omega_0^2\zeta + \omega_0^2} = -\frac{k_i}{2\zeta\omega_0}$$

vilket alltså ligger på negativa reella axeln. Eftersom fasen sjunker monotont från -90 till -270 grader finns inga andra skärningar (vilket ju även syns i figuren).

b. Vi har $-\frac{1}{A_m} = -\frac{k_i}{2\zeta\omega_0}$ vilket ger $k_i = \zeta\omega_0$ då $A_m = 2$.

c. Den vänstra Nyquistkurvan har amplitudmarginal 2. Från figuren ser vi då att fasmarginalen är ungefär 90 grader.