

Reglerteknik, allmän kurs (FRTF05)

Tentamen 17 januari 2025 kl 14.00–19.00

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 50 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift. OBS! Enbart hela poäng utdelas vid rättning. Betygsgränser:

Betyg 3: 24 poäng
4: 34 poäng
5: 44 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan och Canvas.

Anvisningar (OBS!)

Skriv enbart på ena sidan av varje ark (d.v.s. inte på både fram- och baksida).

Påbörja varje ny uppgift 1–7 på ett nytt ark. Deluppgifter (a,b,c, ...) kan dock redovisas på samma sida.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK, 17 januari 2025

1. Denna uppgift handlar om PID-reglering av dubbeltankprocessen.
- a. Skriv ner överföringsfunktionen för (den ideala) PID-regulatorn. (2 p)
- b. Du reglerar en dubbeltankprocess med en PID-regulator och är inte nöjd med resultatet – den undre tanknivån svänger för mycket. Vilken eller vilka av följande åtgärder kommer troligen att kunna minska svängningarna?
- Öka K
 - Minska T_i
 - Öka T_d
- (3 p)
- c. D-delen kan orsaka problem om det förekommer stegändringar i börvärdet. Förklara kortfattat vad problemet är och hur regulatorn kan modifieras för att hantera problemet. (2 p)
- d. Du investerar i en extra sensor som kan mäta ett externt störflöde som kommer in i den *övre* tanken. Förklara hur styrlagen kan modifieras för att kompensera för denna störning. Rita ett blockdiagram som förklarar din lösning. (3 p)

Solution

- a. $G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right)$
- b.
- Att öka K innebär oftast ett snabbare system men sämre stabilitetsmarginaler.
 - Att minska T_i innebär mer integralverkan, vilket ger sämre stabilitetsmarginaler.
 - Att öka T_d innebär mer dämpning, vilket ofta ger bättre stabilitetsmarginaler.

Den enda korrekta åtgärden är således att öka T_d . (För full poäng måste alla tre alternativen kommenteras.)

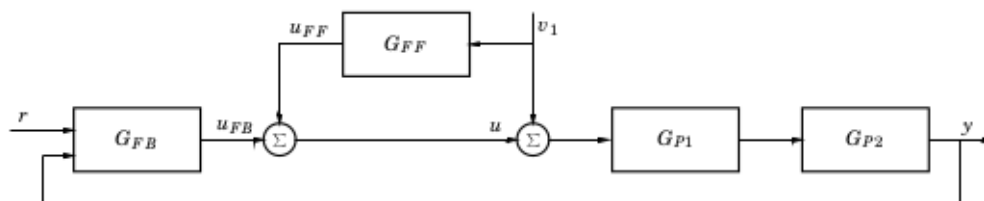
- c. Derivatadelen ges i tidsdomänen av

$$D(t) = KT_d \frac{de(t)}{dt} = KT_d \left(\frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

Om $r(t)$ ändras som ett steg så kommer $D(t)$ att bli obegränsad. En enkel lösning är att låta derivatadelen endast arbeta på utsignalen:

$$D(t) = -KT_d \frac{dy(t)}{dt}$$

- d. Om det uppmätta störflödet har samma enhet som styrsignalen kan regulatorn helt enkelt subtrahera störflödet från styrsignalen. I blockdiagrammet nedan ska vi välja $G_{FF} = -1$ för att eliminera inverkan av störningen v_1 som påverkar den övre tanken G_{P1} .



2. Populationsdynamiken hos två fiskarter ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(40 - x_1) - 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2 - 20x_2\end{aligned}$$

- Hitta systemets tre stationära punkter. (3 p)
- Linjärisera systemet kring en av de stationära punkter du fann i a. (4 p)
- Avgör stabiliteten hos det linjäriserade system du tog fram i b. (2 p)

Solution

- a. Vi utgår från

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(40 - x_1) - 2x_1x_2 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2 - 20x_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

I en stationär punkt (x_1^0, x_2^0) ska alla tidsderivator vara noll. Vi har

$$\begin{aligned}0 &= x_1^0(40 - x_1^0) - 2x_1^0x_2^0 \\ 0 &= x_1^0x_2^0 - 20x_2^0\end{aligned}$$

med lösningarna $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$, $(x_1^0, x_2^0) = (40, 0)$ och $(x_1^0, x_2^0) = (20, 10)$.

- b. Beräkna partiella derivator:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 - 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ x_2 & x_1 - 20 \end{pmatrix}$$

Utvärdera i en stationär punkt. De tre möjliga lösningarna är:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} = A_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(40, 0) &= \begin{pmatrix} -40 & -80 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = A_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(20, 10) &= \begin{pmatrix} -20 & -40 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = A_3\end{aligned}$$

Efter ett variabelbyte, $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, fås det linjäriserade systemet

$$\Delta \dot{x} = A_i \Delta x$$

med en av de tre A -matriserna ovan.

- c. Stabiliteten avgörs av egenvärdena till A -matrisen. För den diagonala A_1 och den triangulära A_2 ser vi direkt att ett egenvärde är positivt (40 respektive 20). För A_3 får vi det karakteristiska polynomet

$$\det(sI - A_3) = \det \begin{pmatrix} s+20 & 40 \\ -10 & s \end{pmatrix} = s^2 + 20s + 40$$

Eftersom koefficienterna båda är positiva så är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt.

3. Du har utformat en tillståndsåterkoppling

$$u = -Kx + k_r r = -x_1 - 2x_2 + 2r$$

för processen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

- a. Var är polerna hos det slutna systemet placerade? (2 p)
- b. För vilka värden på c_1 och c_2 är processen *inte* observerbar? (2 p)
- c. Utforma en observerare (ett Kalmanfilter) för processen då $c_1 = 1$ och $c_2 = 0$. Motivera alla nödvändiga designval. (4 p)

Solution

- a. Det karakteristiska polynomet för det slutna systemet ges av

$$\det(sI - A + BK) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 + 2k_1 & s + 2k_2 \end{vmatrix} = s^2 + 4s + 4 = (s + 2)^2$$

Slutna systemets båda poler ligger således i $s = -2$.

- b. Observerbarhetsmatrisen ges av

$$W_0 = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -2c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

Vi ser att raderna alltid är linjärt oberoende såvida inte både c_1 och c_2 är noll. Alternativt kan vi beräkna determinanten

$$\det W_0 = c_1^2 + 2c_2^2,$$

och notera att den bara kan vara noll om både c_1 och c_2 är noll. Processen är således inte observerbar endast då $c_1 = c_2 = 0$.

- c. Vi ska utforma en observerare

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Enligt en tumregel kan vi välja observerarens poler dubbelt så snabba som det slutna systemet från tillståndsåterkopplingen. (Att välja andra snabbare poler än det slutna systemet i **a** går också bra.) Observerarens karakteristiska polynom ges av

$$\det(sI - A + LC) = \begin{vmatrix} s + l_1 & -1 \\ 2 + l_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + l_1 s + 2 + l_2$$

Vi jämför med det önskade karakteristiska polynomet $(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$ och får $l_1 = 8$ och $l_2 = 14$.

4. Figur 1 visar singularitetsdiagrammen för fyra olika system, och figur 2 visar stegsvaren för samma system, men inte nödvändigtvis i samma ordning. Para ihop singularitetsdiagram 1–4 med motsvarande stegsvar A–D. Motivera! (4 p)

Solution

Eftersom alla poler är imaginära så kan överföringsfunktionen för varje system skrivas på formen

$$G(s) = \frac{\sim}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Större ω_0 innebär poler längre från origo och ger snabbare stegsvar. Större ζ innebär en mindre vinkel mellan polerna och den negativa reella axeln och ger mera dämpade stegsvar. Singularitetsdiagram 1 och 3 har mindre ζ och skiljer sig bara åt med ω_0 (där 3 är snabbare än 1). Singularitetsdiagram 2 och 4 har större ζ och skiljer sig bara åt med ω_0 (där 4 är snabbare än 2).

Rätt parning är således 1–D, 2–C, 3–B, 4–A.

5. En regulatorstruktur som kan kallas ”mitthållning” visas i figur 3.

- a. Bestäm överföringsfunktionen från r till y . (3 p)

- b. Antag att $G_{P1}(s) = \frac{1}{s-1}$, $G_{P2}(s) = \frac{1}{s+2}$, $G_{R1}(s) = 1$ och $G_{R2}(s) = \frac{1}{s}$.

Beräkna y :s stationära värde, om det existerar, då $r(t) = 1$ och $u_{\text{ref}}(t) = 0$. (3 p)

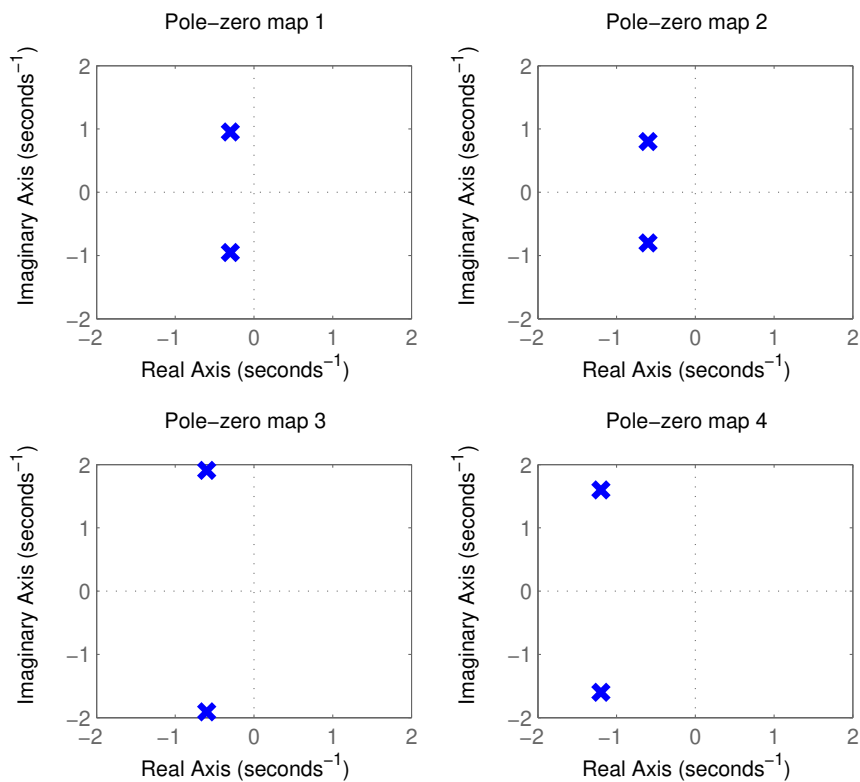
Solution

- a. Med $u_{\text{ref}} = 0$ får vi

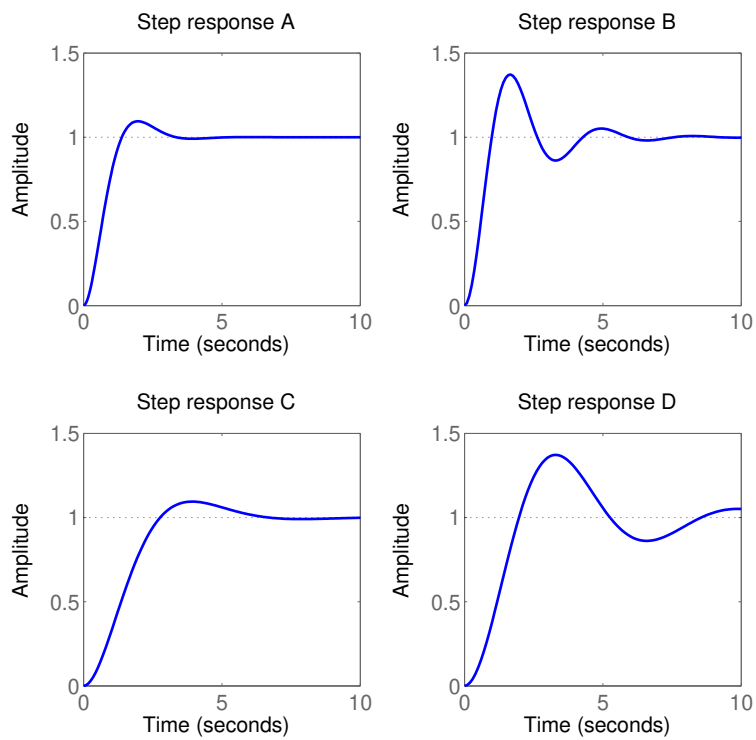
$$Y = (G_{P1} + G_{P2}G_{R2})G_{R1}(R - Y)$$

Lös ut Y :

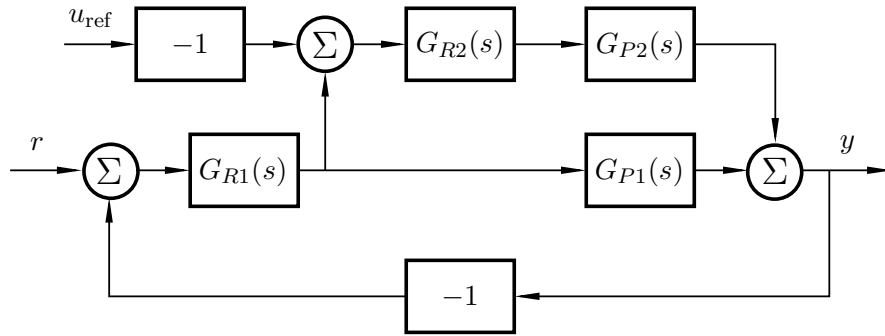
$$Y = \frac{(G_{P1} + G_{P2}G_{R2})G_{R1}}{1 + (G_{P1} + G_{P2}G_{R2})G_{R1}}R$$



Figur 1 Singularitetsdiagram i uppgift 4



Figur 2 Stegsvär i uppgift 4



Figur 3 Regulatorstrukturen i uppgift 5.

- b. Vi sätter in $R(s) = \frac{1}{s}$, $G_{P1} = \frac{1}{s-1}$, $G_{P2} = \frac{1}{s+2}$, $G_{R1} = 1$ och $G_{R2} = \frac{1}{s}$ och får

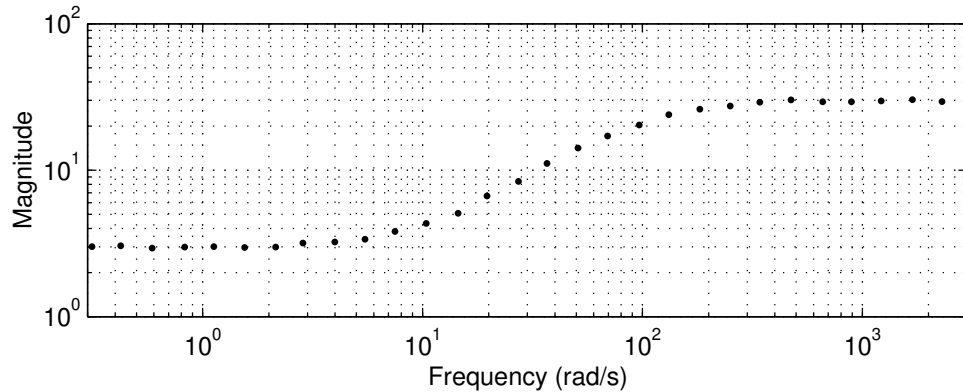
$$Y = \frac{\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} \frac{1}{s}\right)}{1 + \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} \frac{1}{s}\right)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 3s - 1}{s^3 + 2s^2 + s - 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Försök använda slutvärdesteoremet:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 3s - 1}{s^3 + 2s^2 + s - 1}$$

Här noterar vi att $sY(s)$ är instabil (eftersom en koefficient i nämnaren är negativ). Således existerar inget stationärt värde.

6. Genom frekvensexperiment på ett mekaniskt system har du tagit fram ett empiriskt Bode-magnituddiagram som visas i figur 4.



Figur 4 Experimentellt framtaget magnituddiagram i uppgift 6

- Uppskatta systemets överföringsfunktion. Antag att systemet inte har några poler eller nollställen i höger halvplan och heller inga tidsfördröjningar. (4 p)
- Skissa systemets Bode-fasdiagram. (Endast låg- och högfrekvensasymptoterna måste ha helt korrekta värden.) (2 p)

Solution

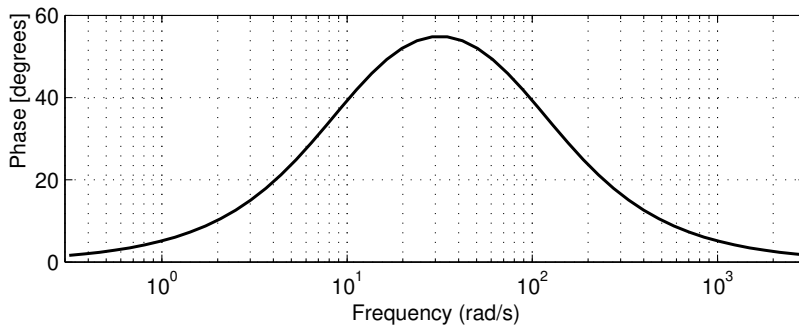
- a. Vi studerar magnitudkurvans asymptoter och uppskattar de två brytfrekvenserna till ca $\omega = 10$ och $\omega = 100$. Eftersom både låg- och högfrekvensasymptoten har lutningen noll innebär detta att överföringsfunktionen endast har ett nollställe i $s = -10$ och en pol i $s = -100$ och kan skrivas på formen

$$G(s) = \frac{K(s + 10)}{s + 100}$$

där förstärkningsfaktorn K återstår att bestämma. T.ex. ger lågfrekvensasymptoten att $G(0) = 3$, vilket ger

$$G(s) = \frac{30(s + 10)}{s + 100}$$

- b. Eftersom både låg- och högfrekvensasymptoten har lutningen noll så startar och slutar faskurvan på 0° . Kring nollställets brytfrekvens ökar fasan för att sedan skjunta kring polens brytfrekvens. Den maximala fasökningen kommer att vara mindre än 90° , men dess exakta värde behöver inte bestämmas. (Om man upptäcker att systemet kan tolkas som en fasavancerande länk med $N = 10$ så är det möjligt att bestämma den maximala fasökningen till 55° .) Faskurvan visas nedan.

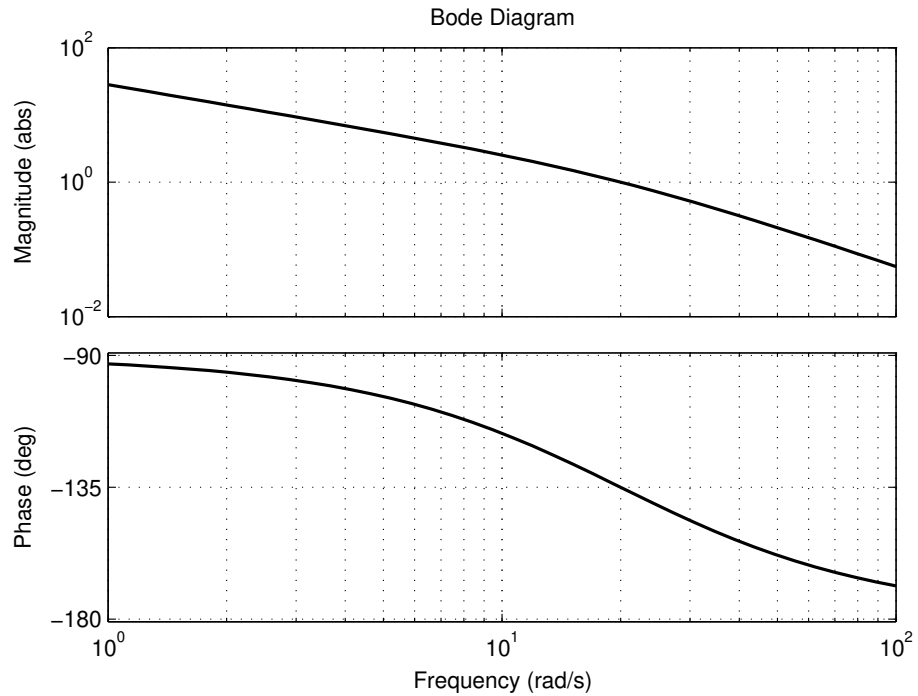


7. Du har utformat en regulator $G_R(s)$ för någon process $G_P(s)$. Bodediagrammet för det öppna systemet $G_0(s) = G_P(s)G_R(s)$ visas i figur 5. Du har simulerat det slutna systemet och är nöjd med hastigheten och robustheten.
- a. Tyvärr leder en långsam internetuppkoppling i implementeringen till att en tidsfördröjning på 32 ms införs i reglerkretsen, vilket i sin tur leder till försämrad prestanda. Utforma en kompensering $G_K(s)$ så att den ursprungliga skärfrekvensen och fasmarginalen återfås. (5 p)
- b. Efter att den ursprungliga skärfrekvensen och fasmarginalen har återfåtts med hjälp av kompenseringslänken, kommer det kompenserade systemet att vara lika bra som det ursprungliga? Eller finns det några skillnader i prestanda? (2 p)

Solution

- a. I Bodediagrammet ser vi att den ursprungliga fasmarginalen är $\varphi_m = 45^\circ$ och att den ursprungliga skärfrekvensen är $\omega_c = 20$ rad/s. En tidsfördröjning e^{-sL} , där $L = 0.032$, kommer att minska fasmarginalen med

$$\omega_c L = 0.64 \text{ rad} = 37^\circ$$



Figur 5 Det öppna systemets Bodediagram i uppgift 7

För att kompensera för fasförlusten kan vi använda en fasavancerande länk,

$$G_K(s) = K_K N \frac{s + b}{s + bN}$$

där $N = 4$ räcker för att öka fasan med 37° (avläst i diagrammet i formelsamlingen). Parametern b ges av

$$b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} = 10$$

Rätt skärffrekvens (den ursprungliga) fås om

$$\underbrace{G_K(i\omega_c)}_{=K_K\sqrt{N}} \underbrace{G_0(i\omega_c)}_{=1} = 1$$

vilket ger $K_K = \frac{1}{\sqrt{N}} = 0.5$. Länken är således

$$G_K(s) = 2 \frac{s + 10}{s + 40}$$

b. Några möjliga svar:

- Tidsfördröjningen kan inte tas bort med hjälp av kompenseringslänken, även om fasmarginalen och skärffrekvensen återställs. Svaret på en referensändring eller störning kommer att fördröjas med 32 ms, oavsett vilken regulator som används.
- Den fasavancerande länken sänker systemets lågfrekvensförstärkning (asymptotisk förstärkning 0.5), vilket betyder att statiska störningar kommer att undertryckas sämre/långsammare.

- Den fasavancerande länken höjer systemets högfrekvensförstärkning (asymptotisk förstärkning 2), vilket betyder att systemet kommer att vara mer känsligt för mätbrus.