LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 26 Augusti 2019 kl 14–19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs av differentialekvationen

$$\dddot{y} - 2\ddot{u} + \ddot{y} = 3u - y.$$

a. Bestäm systemets överföringsfunktion. (1 p)

b. Är systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

Solution

a. Laplacetransformera differentialekvationen:

$$s^3Y(s) - 2s^2U(s) + s^2Y(s) = 3U(s) - Y(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{2s^2 + 3}{s^3 + s^2 + 1}U(s) = G(s)U(s),$$

där överföringsfunktionen identifieras som

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3}{s^3 + s^2 + 1}$$

b. Nej. Stabilitetsvillkoren (se t.ex formelsamlingen) ger att systemet *inte* är asymptotiskt stabilt.

2. En process har överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{s + 1}{(s + 10)(s + 2)}.$$

En sinussignal $u(t) = \sin(4t)$ skickas in i processen. Bestäm utsignalen. (2 p)

Solution

Då insignalen är en sinussignal med konstant vinkelfrekvens är även utsignalen en sinussignal med samma vinkelfrekvens men annorlunda amplitud och fasförskjuten.

$$u(t) = \sin(4t) \Rightarrow$$
$$y(t) = |G_p(4i)| \sin(4t + \arg G_p(4i))$$

Då $|G_p(4i)| = 0.086$ och $\arg(G_p(4i)) = -9.27°$ blir utsignalen

$$y(t) = 0.09 \sin(4t - 9.3°)$$

.

3. Besvara följande frågor:

a. Hur är skärfrekvensen definerad? Varför är den viktig? (1 p)

b. Hur är fasmarginalen definerad? Varför är den viktig? (1 p)

Solution

a. Skärfrekvensen, ω_c, är definerad som den första frekvens vid vilken amplituden av kretsöverföringsfunktionen är 1.

$$|G_0(i\omega_c)| = 1.$$

Den är viktig då den hjälper oss definera snabbheten för ett system.

b. Fasmarginalen är definerad som

$$\pi - \arg(G_0(i\omega_c)).$$

Den är viktig då den beskriver hur mycket fasminskning systemet kan ha utan att passera stabilitetsgränsen.

4. Ett olinjärt dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\dot{x} = -\ln x + u$$

a. Finn *samtliga* stationära punkter till systemet när $u = u^0 = \alpha \in \mathbb{R}$. (1 p)

b. Linjärisera systemet runt *alla* stationära punkter som hittades i **a**-uppgiften. (2 p)

c. För vilka α blir det linjäriserade systemet stabilt? (1 p)

Solution

a. För stationära punkter gäller att $\dot{x} = 0$

$$0 = \dot{x} = -\ln x + u$$
$$x^0 = e^{u^0}$$

Så alla stationära punkter kan betecknas som $(x^0, u^0) = (e^\alpha, \alpha)$.

b. Först tar vi fram alla partiella derivator av $f(x, u) = \dot{x} = -\ln x + u$

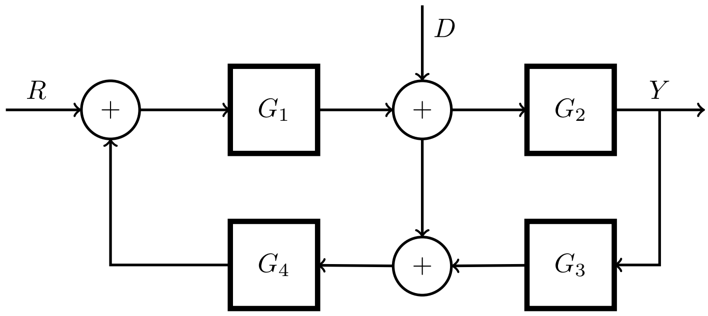
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) = -\frac{1}{x^0} = -e^{-\alpha}$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0) = 1$$

Sen inför vi $\Delta x = x - x^0$ och $\Delta u = u - u^0$ och får då det linjäriserade systemet

$$\dot{\Delta x} = -e^{-\alpha}\Delta x + \Delta u.$$

c. Systemets egenvärde är $-e^{-\alpha}$ vilket är negativt för alla α och därmed stabilt.

5. Figuren föreställer ett blockdiagram för ett system



a. Ge överföringsfunktionen från R till Y. (1 p)

b. Ge överföringsfunktionen från D till Y. (1 p)

Solution

a. Using a temporary variable U after block G1 and taking D = 0 we get,

$$
\begin{aligned}
Y &= G_2 U \\
U &= G_1 R + G_1 G_4 U + G_1 G_3 G_4 Y \\
U &= \frac{G_1 R + G_1 G_3 G_4 Y}{1 - G_1 G_4} \\
\frac{Y}{R} &= \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_4 - G_1 G_2 G_3 G_4}
\end{aligned}
$$

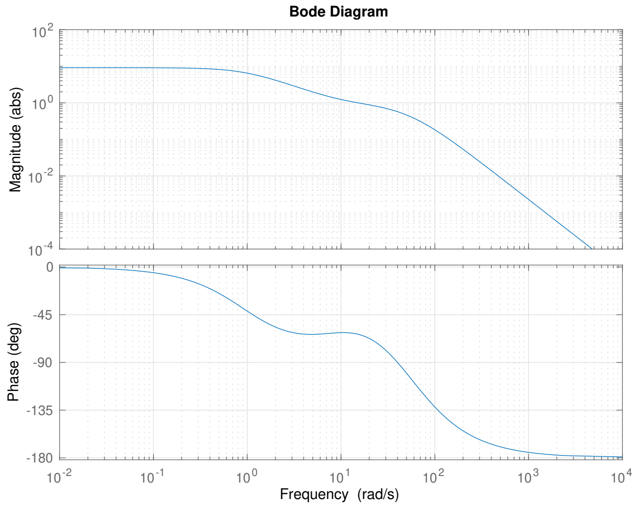
b. Taking R = 0 we get,

$$
\begin{aligned}
Y &= G_2(D + U) \\
U &= G_1 G_4 (U + D + G_3 Y) \\
U &= \frac{G_1 G_4 D + G_1 G_3 G_4 Y}{1 - G_1 G_4} \\
Y &= G_2 D + \frac{G_1 G_2 G_4 D + G_1 G_2 G_3 G_4 Y}{1 - G_1 G_4} \\
\frac{Y}{D} &= \frac{G_2}{1 - G_1 G_4 - G_1 G_2 G_3 G_4}
\end{aligned}
$$

6. För en process är följande givet: överföringsfunktionen (1) och Bodediagrammet i Figur 1. Anta att vi inte har några pol-nollställes förkottningar.

$$
G(s) = \frac{k(s + b_0)}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{1}
$$

a. Beräkna följande systemegenskaper (anta $G_r(s) = 1$):



Figur 1

- systemets ordning,
- statiska förstärkningen; ge svaret både analytiskt (utifrån överföringsfunktionen) och numeriskt (utifrån bode diagrammet),
- skärfrekvensen.

(1.5 p)

b. Rita Nyquistdiagrammet för processen! Konstnärlig förmåga är inte viktig, dock ska de essentiella delarna av Nyquistdiagrammet vara med. För vilka $K > 0$ är det återkopplade systemet (med $G_r(s)$) asymptotiskt stabilt? (1.5 p)

Solution

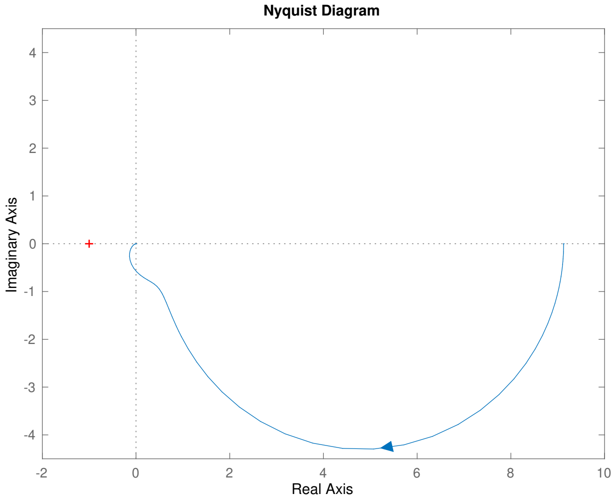
a. The system is of order three since the denominator of the transfer function is a polynomial of third order and there are no pole-zero cancellations. The static gain of the system is of 10 according to the bode plot (gain at zero frequency) and $G(0) = k * b_0/a_0$ according to the parametric transfer function. The cutoff frequency, defined as the frequency at which the system has unit gain, can be retrieven from the bode diagram: the magnitude plot cuts the x-axis in the magnitude-value 1, in the interval $10 < \omega_c < 20$.

b. Since the nyquist diagram never reaches the top-left quadrant the system will be stable for whatever $K > 1$ as it never encircles point -1.

7. Betrakta det instabila systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Designa en tillståndsåterkoppling från skattade tillstånd sådan att systemets båda poler hamnar i -1. Designa även tillhörande Kalman-filter. (4 p)



Figur 2

Solution

Vi söker alltså en observerare och en styrlag på formerna

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}),\\ u &= -L\hat{x},\end{aligned}$$

där vi behöver bestämma $K = [\,k_1 \quad k_2\,]^T$ och $L = [\,l_1 \quad l_2\,]$ enligt specifikationerna. Det karaktäristika polynomet för tillståndsåterkopplingen ges av

$$\begin{aligned}p(s) = \det(sI - A + BL) &= \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -2+l_1 & s+l_2 \end{vmatrix}\\ &= s^2 + (-1+l_2)s - l_2 - 2 + l_1 = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1.\end{aligned}$$

Identifiering av polynomkoefficienter ger

$$\begin{cases} -1 + l_2 = 2, \\ -2 + l_1 - l_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} l_2 = 3, \\ l_1 = 3 + l_2 = 6. \end{cases}$$

Observerarens poler placeras lämpligen på det dubbla avståndet från origo, till exempel i -2. Det karaktäristiska polynomet för observeraren är

$$\begin{aligned}q(s) = \det(sI - A + KC) &= \begin{vmatrix} s-1+k_1 & -1 \\ -2+k_2 & s \end{vmatrix}\\ &= s^2 + (-1+k_1)s - 2 + k_2 = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4.\end{aligned}$$

Identifiering av polynomkoefficienter ger

$$\begin{cases} -1 + k_1 = 4, \\ -2 + k_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = 5, \\ k_2 = 6. \end{cases}$$

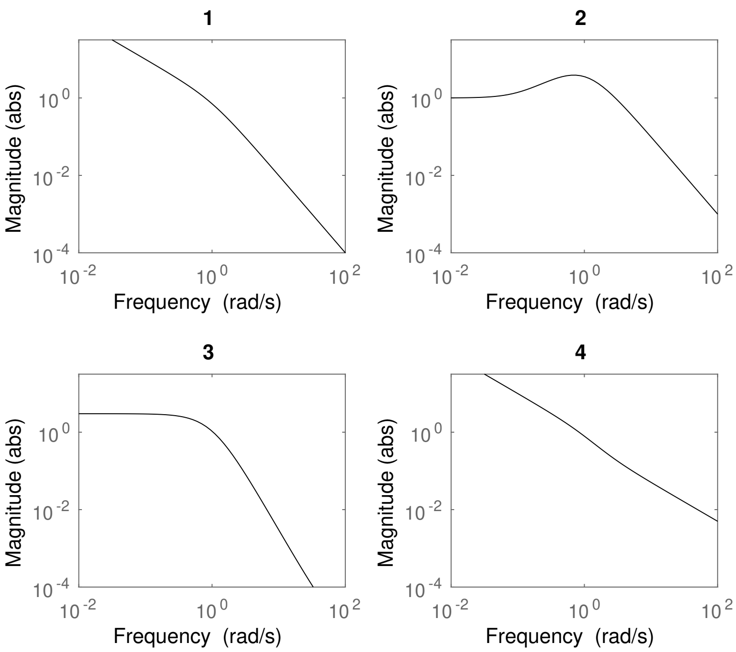
8. En process har följande överföringsfunktion

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Fyra olika regulatorer testas: PI, PID, fasavancerande och fasretarderande.

a. I Figur 3 visas amplituden för $G_0(s) = G_p(s)G_r(s)$ för de fyra olika regulatorerna och Figur 4 visas fasen. Para ihop amplitud kurvorna $1-4$ med faskurvorna $A-D$ samt namnge regulatorn som användes i de fyra fallen. (4 p)

b. I Figur 5 visas stegsvaren för de slutna systemen, $\frac{G_pG_r}{1+G_pG_r}$, givna av de fyra regulatorerna. Namnge regulatorn som användes för stegsvaren $I-IV$ med hjälp av amplitud och faskurvorna. (2 p)



Figur 3: Amplitud för $G_0(s) = G_p(s)G_r(s)$ för de fyra olika regulatorerna i uppgift 8.

Solution

a. FA och FR saknar integralverkan så dom ska ha ändlig statisk förstärkning och faskurvan ska gå mot 0 när $w \to 0 \Rightarrow$ Amplitud 2 och 3. Fas B och D.

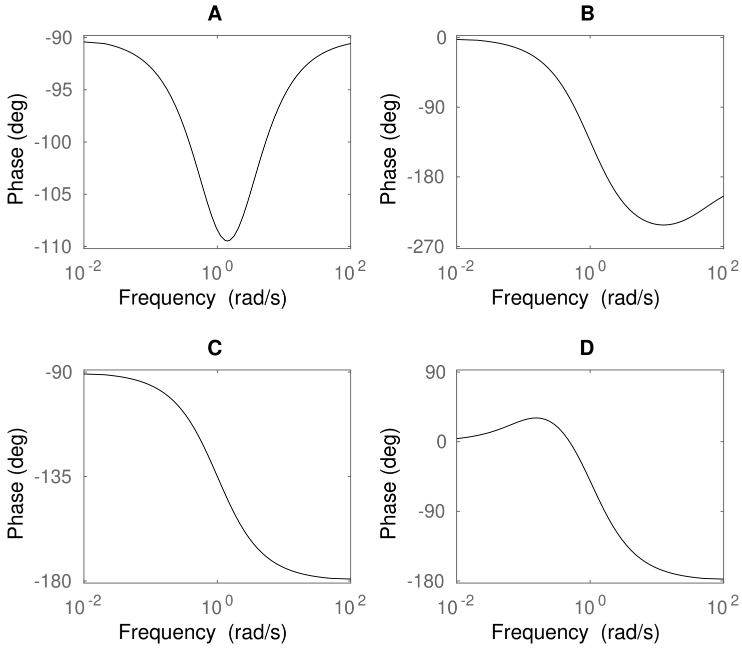
FA ökar fasen $\Rightarrow$ Fas D. FR sänker fasen $\Rightarrow$ Fas B.

FR har lägre förstärkning för höga frekvenser än för låga, samma gäller för G_p $\Rightarrow G_pG_r$ kan ej ha ökande amplitud för FR. $\Rightarrow$ Amplitud 3.

FA $\Rightarrow$ Amplitud 2.

Amplituden för en PID bryter upp jämfört med en PI $\Rightarrow$ PID $\to$ 4 och PI $\to$ 1

För små w så sänker både PI och PID fasen med 90° medans för höga w så gör PI ingenting medans PID lyfter fasen med 90° $\Rightarrow$ PID $\to A$ och PI $\to C$.



Figur 4: Fas för $G_0(s) = G_p(s)G_r(s)$ för de fyra olika regulatorerna i uppgift 8.

Sammanfattningsvis

FR - 3 - B

FA - 2 - D

PI - 1 - C

PID - 4 - A

b. II och IV har stationära fel $\Rightarrow$ FR och FA.

FR har högre statisk förstärkning $\Rightarrow$ FR $\rightarrow$ IV och FA $\rightarrow$ II. (FR har även sämre fasmarginal $\Rightarrow$ mer oscillationer.)

PI och PID har ungefär samma skärfrekvens men PI har sämre fasmarginal $\Rightarrow$ PI ska ha svängigare än PID $\Rightarrow$ PI $\rightarrow$ I och PID $\rightarrow$ III.

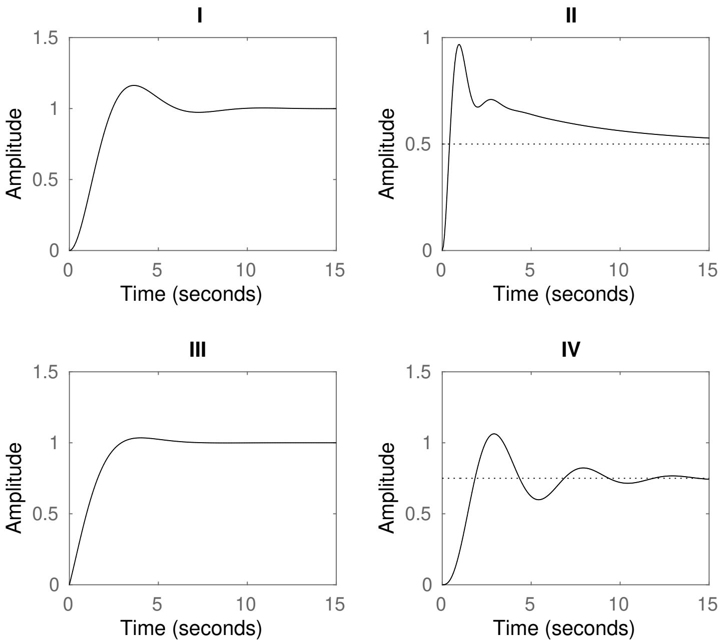
Sammanfattningsvis

FR - IV

FA - II

PI - I

PID - III



Figur 5: Stegsvar $\frac{G_p G_r}{1+G_p G_r}$ för de fyra olika regulatorerna i uppgift 8.