LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 26 oktober 2020, 14:00–19:00

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsnivåer:

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tid och plats för tentavisning kommer att anges på kurshemsidan.

1. Ett linjärt, tidsinvariant system beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 3y(t) = 5\dot{u}(t) + u(t)$$

där $y(t)$ är mätsignal och $u(t)$ är styrsignal.

a. Vad är systemets överföringsfunktion? (1 p)

b. Rita ut systemets poler i det komplexa talplanet. (1 p)

c. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? Motivera ditt svar. (0.5 p)

d. Kalle och Lisa diskuterar vad som händer om systemet utsätts för en styrsignal $u(t)$ i form av ett enhetssteg. Kalle säger att $y(t)$ kommer att konvergera mot värdet 1/3. Lisa säger att $y(t)$ kommer att konvergera mot 0. Har någon av dem rätt och i så fall vem? Motivera ditt svar. (0.5 p)

Solution

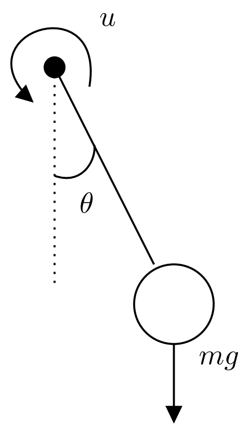
a. Laplace ger:

$$s^2Y(s) + 3Y(s) = 5sU(s) + U(s)$$
$$Y(s) = \frac{5s+1}{s^2+3}U(s)$$

b. Systemet har poler i $\pm\sqrt{3}i$ vilket vi finner genom att lösa $s^2 + 3 = 0$.

c. Systemet är stabilt men ej asymptotiskt stabilt, då vi har enkla poler på imaginära axeln.

d. Både Kalle och Lisa har fel, eftersom systemet inte är asymptotiskt stabilt existerar inte gränsvärdet utan svaret blir en sinusoid.



Figur 1: Pendel från problem 2.

2. En pendel är enkelt monterad i en motor som kan ge ett externt vridmoment u (se Figur 1). Från nedåt hängande läge kan vi definiera vridvinkeln θ. Vi definierar tillstånden $x_1 = \dot{\theta}$ och $x_2 = \theta$. Vi kan formulera följande differentialekvationer (givet väldigt räknevänliga parametrar för pendelns egenskaper):

$$\dot{x}_1 = -\sin x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$

a. Linjärisera systemet kring den stationära punkten $u = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Är det resulterande systemet stabilt? Kommentera rimligheten i detta. (1.5 p)

b. Linjärisera systemet kring den stationära punkten $u = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$. Är det resulterande systemet stabilt? Kommentera rimligheten i detta. (1.5 p)

Solution

Den linjäriserade modellen av systemet kommer att se ut som

$$\Delta\dot{x}_1 = -\cos(x_2^0)\Delta x_2 + \Delta u$$
$$\Delta\dot{x}_2 = \Delta x_1$$

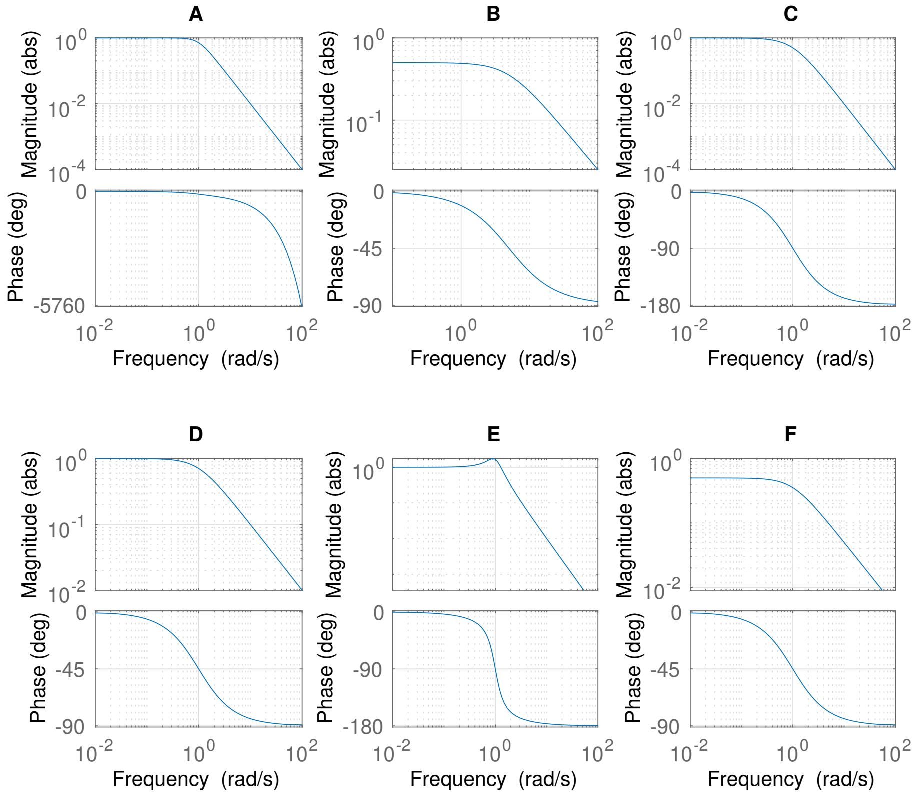
$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(x_2^0) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

Systemet kommer att ha det karakteristiska polynomet $\det(sI - A) = s^2 + \cos(x_2^0)$. Detta har poler i $s = \pm\sqrt{-\cos(x_2^0)}$

a. Givet $x_2^0 = 0$ hamnar polerna i $s = \pm i$, vilket är marginellt stabilt. Rimligtvis ser vi att om vi släpper pendeln nära det nedåthängande läget kommer den att oscillera stabilt kring det läget, men eftersom vi inte modellerar någon friktion kommer den också att oscillera för evigt.

b. Givet $x_2^0 = \pi$ hamnar polerna i $s = \pm 1$. En av dessa poler är instabil, vilket är rimligt. Vi ser att detta motsvarar läget då pendeln hänger uppåt, och om man då släpper pendeln lite vid sidan av det stationära uppåt-läget kommer pendeln att accelerera okontrollerat.

3. I figur 2 visas Bodediagram för sex olika asymptotiskt stabila system som saknar nollställen. Stegsvaren för samma system visas i slumpad ordning i figur 3. Para ihop Bodediagrammen A-F med stegsvaren 1-6. För varje par krävs en motivering. (3 p)



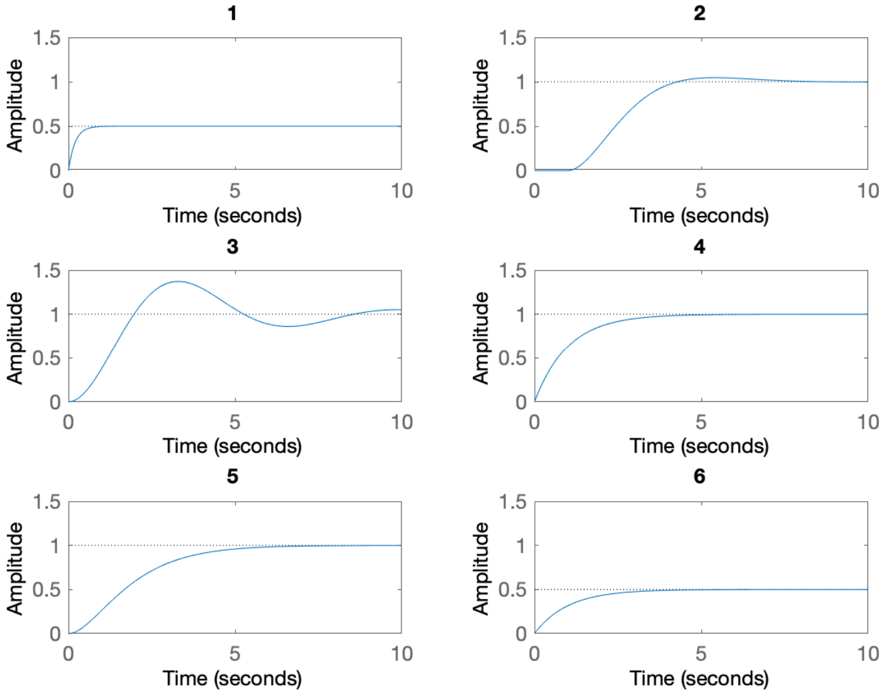
Figur 2: Bodediagram till uppgift 3.

Solution

Bodediagram A har en fas som sjunker snabbt vid höga frekvenser, samtidigt som lutningen för förstärkningskurvan förblir -2. Det senare tyder på att vi inte har fler nya poler, och fasminskningen måste därför orsakas av en dödtid. En dödtid ger just en snabb fasminskning för höga frekvenser, utan att påverka förstärkningskurvan, och detta beteende ser vi i diagram A, men inte i något av de andra. Vi har således ett system med dödtid, vilket måste motsvara stegsvar 2. Vi har alltså paret **A** $\leftrightarrow$ **2**.

Vi ser att av diagrammen B–F så motsvarar C och E andra ordningens system, eftersom fasen minskar till $-180°$ och lutningen på förstärkningskurvan är -2 för höga frekvenser, medan övriga system är av första ordningen eftersom fasen minskar till $-90°$ och lutningen på förstärkningskurvan är -1 för höga frekvenser. Stegsvaren kan skiljas åt genom att titta på begynnelsederivatan. Enligt begynnelsevärdessatsen får vi

$$\dot{y}(0) = \lim_{t \to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \to \infty} sG(s).$$



Figur 3: Stegsvar till uppgift 3.

Detta innebär att ett asymptotiskt stabilt förstaordningssystem utan nollställen leder till en derivata som är större än noll, medan derivatan för ett asymptotiskt stabilt andraordningssystem utan nollställen blir noll. Vi ser därför att stegsvaren 3 och 5 motsvarar andraordningssystem, medan 1, 4 och 6 motsvarar förstaordningssystem.

Skillnaden mellan Bodediagrammen C och E är att E har en resonanstopp, vilket indikerar sämre dämpning och leder till ett mer resonant stegsvar. Vi får därför paren **E** $\leftrightarrow$ **3** och **C** $\leftrightarrow$ **5**.

För de återstående Bodediagrammen ser vi på förstärkningskurvan för låga frekvenser att B och F har en statisk förstärkning på 0.5, medan D har den statiska förstärkningen 1. Det måste därför gälla att **D** $\leftrightarrow$ **4**. De två återstående systemen skiljer sig åt endast genom att brytfrekvensen är högre för B än för F. Detta innebär att systemet B är snabbare, och ger oss **B** $\leftrightarrow$ **1** samt **F** $\leftrightarrow$ **6**.

4. En linjär, tidsinvariant process har överföringsfunktionen $G_p(s)$. $G_p(s)$ har skärfrekvensen ω_c och fasmarginalen φ_m. Processen utsätts sedan för en tidsfördröjning L. Systemet återkopplas med en P-regulator med förstärkningen $K = 1$.

a. Vad måste vi ställa för krav på L för att det återkopplade systemet ska vara stabilt? (1 p)

b. En Otto-Smith-regulator introduceras för att kontrollera processen. Antag att vi har en perfekt modell av $G_p(s)$ och en perfekt skattning av L. Antag också att

$\varphi_m = 1$ radian, $\omega_c = 1$ radian/s. Antag $L = 100$ s. Kommer det återkopplade systemet vara stabilt? (1 p)

c. Diskutera rimligheten av ditt svar i b. om detta skulle tillämpas i ett verkligt scenario. (1 p)

Solution

a. Så länge tidsfördröjningen L är kortare än φ_m/ω_c (där båda anges i samma vinkelenhet) är systemet stabilt.

b. Om modellen är perfekt kommer en Otto-Smith-regulator agera som om den styrde efter en modell av processen utan dödtid, för vilken systemet är stabilt. Därav kommer detta system också vara stabilt. Dock kommer utsignalen ha en fördröjning på 100 sekunder jämfört med den fördröjningslösa modellen.

c. Antagandet om en helt perfekt modell, både av processen och av dödtiden, är högst orealistiskt. Det betyder att processen egentligen troligen kommer att bli högst instabil givet fel i modellen eller skattningen, då vi försöker kontrollera processen långt över dödtidsmarginalen.

5. Figur 4 visar fyra stycken Nyquistkurvor a-d.

a. Överföringsunktionerna som motsvarar kurvorna är rationella funktioner (polynom dividerat med polynom), men med olika form:

1. En av funktionerna har 1 nollställe och 3 poler.
2. En av funktionerna har 1 nollställe och 5 poler.
3. En av funktionerna har en integrator (en faktor $1/s$).
4. En av funktionerna har förutom den rent rationella biten även en tidsfördröjningskomponent.

Matcha de olika nyquistkurvorna (a-d) med rätt funktion (1-4). (2 p)

b. Vilka av funktionerna (a-d) kan återkopplas stabilt med en P-regulator med förstärkning $K = 1$? Motivera ditt svar. (0.5 p)

c. Vilken av de funktioner (a-d) som kan återkopplas stabilt (enligt ditt svar i b.) har lägst fasmarginal? Motivera ditt svar. (0.5 p)

d. Vilken av de funktioner (a-d) som kan återkopplas stabilt (enligt ditt svar i b.) har lägst amplitudmarginal? Motivera ditt svar. (0.5 p)

Solution

a. Kurva a) har en spiralform. Eftersom en tidsfördröjning motsvaras i frekvensdomänen av $e^{-i\tau\omega}$ så representerar det en rotation som ökar med ω, vilket gör att vi kan matcha a) med 4.

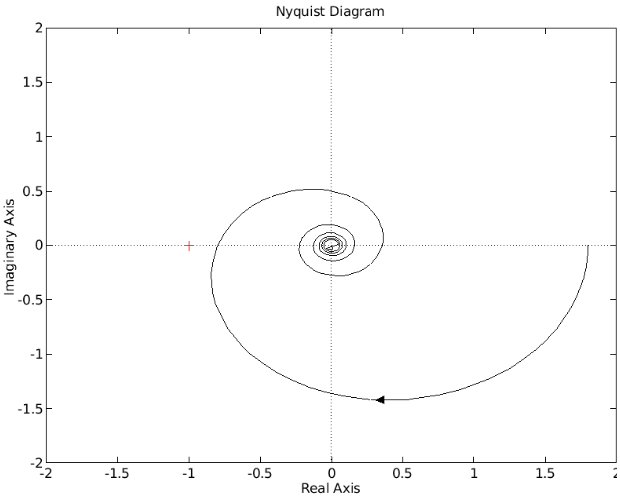
Kurva c) har den enda kurvan som inte konvergerar mot något värde då $\omega \to 0$. Detta innebär att den måste innehålla en integrator och alltså motsvarar 3.

Kurva b) och d) måste då motsvara de rationella funktionerna. Då $\omega \to \infty$ konvergerar b) mot fasen $-180°$. Kurva d konvergerar mot fasen $-360°$. Då differensen mellan poler och nollställen är högre för funktion 2 måste det motsvara kurva d, då detta innebär att den kommer konvergera mot en lägre fas.

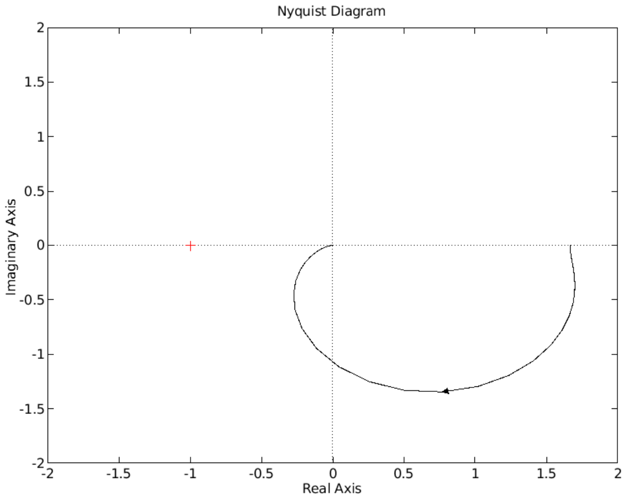
b. Den enda kurva som innesluter -1 är kurva d. Alla övriga system kan alltså återkopplas stabilt enligt Nyquistkriteriet.

c. Kurva a) har en låg fasmarginal. Alla de andra kurvorna har relativt hög fasmarginal.

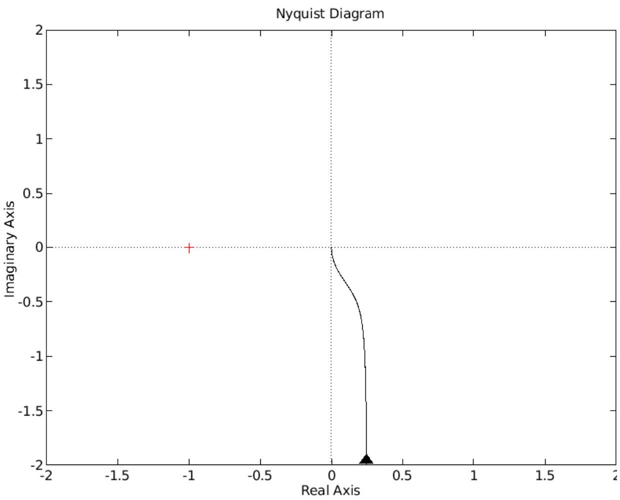
d. Kurva a) har också lägst amplitudmarginal. Vi ser att ingen förstärkning K kan väljas för att göra b) och c) instabila.



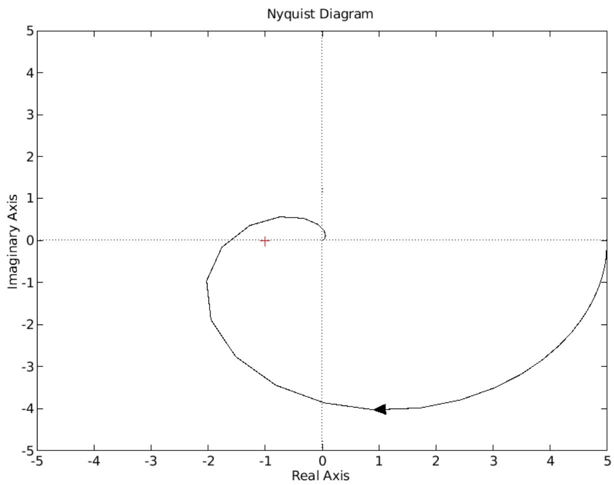
(a)



(b)



(c)



(d)

Figur 4: Nyquistkurvor till uppgift 5.

6. Dynamiken för en spårvagn, från styrsignalen $u(t) \in [0,1]$ till positionen $y(t)$ [m], beskrivs av överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{3}{s(s+0.2)}.$$

Vi vill reglera spårvagnens position med hjälp av en P-regulator $G_R(s) = K$. Ange för vilka värden på K som spårvagnen klarar av att följa en referenssignal $r(t) = 15t$ med ett stationärt fel $|r(t) - y(t)| < 1$. (2 p)

Solution

Kretsöverföringsfunktionen blir

$$G_0(s) = K\frac{3}{s(s+0.2)}.$$

Sambandet mellan referenssignalen och mätsignalen för det slutna systemet är

$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}R(s),$$

och reglerfelet ges av

$$\begin{aligned} E(s) = R(s) - Y(s) &= R(s) - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}R(s) = \left(1 - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\right)R(s) \\ &= \frac{1}{1+G_0(s)}R(s) = \frac{s^2+0.2s}{s^2+0.2s+3K}R(s). \end{aligned}$$

Referenssignalen $r(t) = 15t$ har Laplacetransformen $R(s) = 15/s^2$, och vi vill undersöka reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$ då $t \to \infty$. Slutvärdessatsen ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} 15\frac{s+0.2}{s^2+0.2s+3K} = \frac{1}{K}.$$

Satsen kan användas eftersom $sE(s)$ är asymptotiskt stabilt, då $s^2+0.2s+3K$ har positiva koefficienter förutsatt att $K > 0$. Villkoret blir alltså

$$\lim_{t\to\infty} e(t) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{K} < 1 \Leftrightarrow K > 1,$$

och vi får därmed att $|r(t) - y(t)| < 1$ stationärt för $K > 1$.

7. Positionen x_1 och hastigheten x_2 för en massa m som är fäst i en fjäder och en dämpare och som vi kan påverka med en kraft u beskrivs av systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{aligned}$$

där $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, k är fjäderkonstanten och c är dämpningskoefficienten. Anta i de följande deluppgifterna att $m = 1$, $k = 4$ och $c = 2$.

a. Bestäm en styrlag på formen $u(t) = l_r r(t) - l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t)$, för några konstanter l_r, l_1 och l_2, så att det slutna systemet, från referenssignalen $r(t)$ till mätsignalen $y(t)$, får två poler i $s = -\alpha$ (för ett givet $\alpha > 0$) och statisk förstärkning 1. (2 p)

b. Vi vill skatta tillståndsvariablerna med hjälp av styrsignalen u, mätsignalen y och en observerare på formen $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$. Bestäm den konstanta vektorn $K = [\,k_1 \quad k_2\,]^T$ så att skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ beskrivs av ett linjärt system $\dot{\tilde{x}} = A_o\tilde{x}$, där matrisen A_o har två egenvärden $\lambda = -\beta$ (för ett givet $\beta > 0$). (1 p)

c. Vi kan inte mäta alla tillståndsvariabler och vill därför använda styrlagen som vi bestämt med skattningarna av tillståndsvariablerna som vi får från observeraren. Anta att α är givet. Föreslå ett lämpligt val av β och motivera ditt val. (1 p)

Solution

a. Med de angivna parametervärdena blir systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \\ y &= [\,1 \quad 0\,]\, x = Cx \end{aligned} \tag{1}$$

Vi vill bestämma en tillståndsåterkoppling $u(t) = l_r r(t) - Lx(t)$, där $L = [\,l_1 \quad l_2\,]^T$, så att det slutna systemet (systemet från r till y) får polpolynomet

$$(s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2. \tag{2}$$

Insättning av styrlagen i (1) ger oss det slutna systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_r r \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Polerna till systemet är desamma som egenvärdena till matrisen $A - BL$, vilka ges av nollställena till det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} p(s) = \det(sI - (A - BL)) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\,l_1 \quad l_2\,]\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 + l_1 & s + 2 + l_2 \end{bmatrix} = s^2 + (2 + l_2)s + 4 + l_1. \end{aligned}$$

Vi ska välja parametrarna l_1 och l_2 i vår styrlag så att detta polpolynom är lika med det specificerade polpolynomet (2). Identifiering av koefficienterna ger att detta är uppfyllt om

$$\begin{cases} 2 + l_2 = 2\alpha \\ 4 + l_1 = \alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 = \alpha^2 - 4 \\ l_2 = 2(\alpha - 1) \end{cases}.$$

Den statiska förstärkningen ges av $G(0)$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet är

$$G(s) = C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \alpha^2 & s + 2\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_r.$$

Vi får då

$$G(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha^2 & 2\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_r = \frac{l_r}{\alpha^2},$$

och kravet att den statiska förstärkningen ska vara 1, $G(0) = 1$, är alltså uppfyllt ifall vi väljer $l_r = \alpha^2$.

b. Skattningsfelet för den valda observeraren ändras med tiden som

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - KCx + KC\hat{x} = (A - KC)\tilde{x}.$$

Vi vill se till att egenvärdena för matrisen $A_o = A - KC$ ges som nollställen till det karakteristiska polynomet

$$(s + \beta)^2 = s^2 + 2\beta s + \beta^2. \tag{3}$$

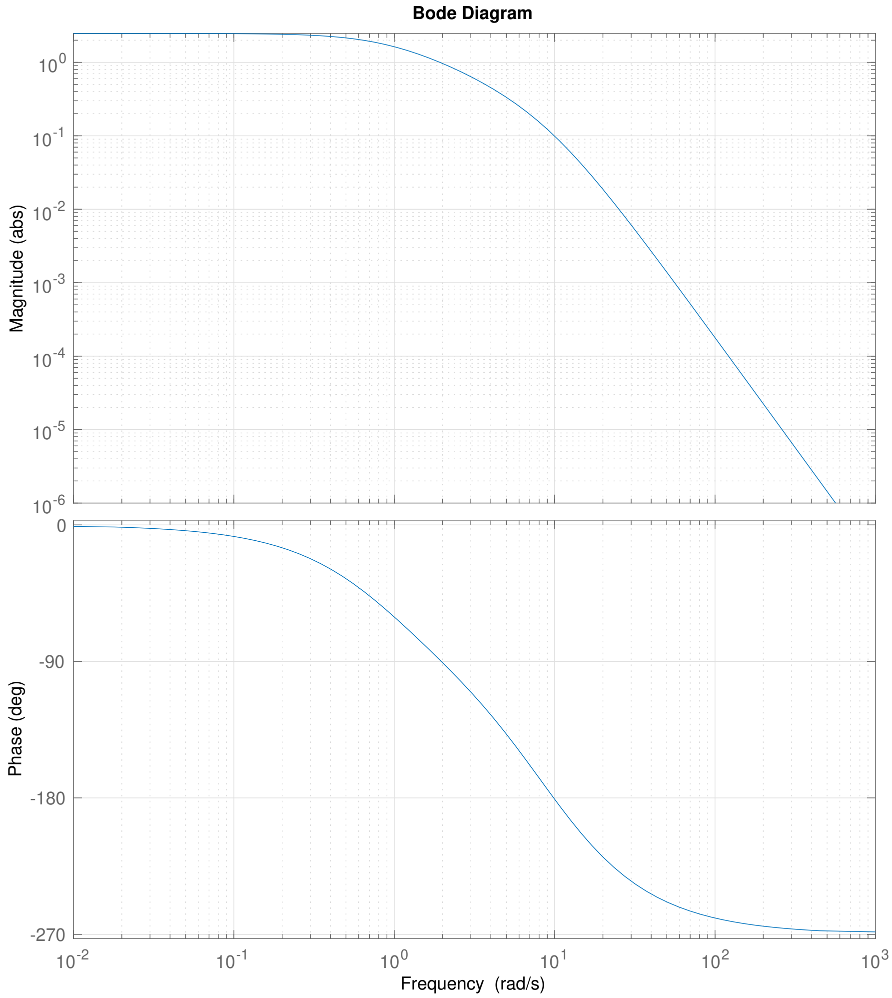
Egenvärdena ges av

$$\begin{aligned} p(s) &= \det(sI - (A - KC)) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} s + k_1 & -1 \\ 4 + k_2 & s + 2 \end{bmatrix} = s^2 + (k_1 + 2)s + 2k_1 + 4 + k_2. \end{aligned}$$

Vi ska välja parametrarna k_1 och k_2 i observeraren så att detta polpolynom är lika med det specificerade polpolynomet (3). Identifiering av koefficienterna ger att detta är uppfyllt om

$$\begin{cases} k_1 + 2 = 2\beta \\ 2k_1 + k_2 + 4 = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2(\beta - 1) \\ k_2 = \beta^2 - 4\beta \end{cases}.$$

c. Ett system med poler i vänster halvplan är snabbare desto längre från origo som polerna ligger. Vi måste se till att skattningen av tillståndsvariablerna är snabbare än dynamiken för det slutna systemet med vår använda styrlag, så att det skattade tillståndet är tillräckligt nära det riktiga innan styrlagen hinner påverka systemet allt för mycket baserat på felaktiga antaganden om tillståndsvariablernas värden. Det måste alltså gälla att $\beta > \alpha$, och ett lämpligt val kan exempelvis vara $\beta = 2\alpha$.



Figur 5: Bodediagram till uppgift 8.

8. Bodediagrammet för ett system $G_0(s)$ visas i figur 5.

a. Vad blir utsignalen $y(t)$ från systemet $G_0(s)$ (efter att transienten har dött ut) då insignalen till detta är $u(t) = \sin(10t)$? (1 p)

b. Vi vill göra systemet snabbare genom att införa en kompenseringslänk $G_k(s)$ så att $G_0(s)$ ersätts med $G_0^{\text{ny}}(s) = G_k(s)G_0(s)$. Bestäm en kompenseringslänk $G_k(s)$ sådan att systemet $G_0^{\text{ny}}(s)$ får en skärfrekvens ω_c^{ny} som är fem gånger så stor som för $G_0(s)$, samt en fasmarginal $\varphi_m^{\text{ny}} \geq 45°$. (2.5 p)

Solution

a. Då insignalen till ett linjärt tidsinvariant system $G_0(s)$ är en sinussignal så blir utsignalen en fasförskjuten sinussignal med samma frekvens, fasändring $\arg G_0(i\omega)$ och en amplitud som är en faktor $|G_0(i\omega)|$ större än insignalens. Vi får alltså utsignalen

$$y(t) = |G_0(10i)| \sin(10t + \arg G_0(10i)) = 0.1 \sin(10t - \pi),$$

genom avläsning av amplitud och fas i Bodediagrammet. Notera att fasändringen måste anges i radianer, eftersom enheten måste vara samma som för ωt.

b. Systemets skärfrekvens kan höjas med hjälp av en fasavancerande länk

$$G_k(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN}.$$

Skärfrekvensen för det okompenserade systemet erhålls genom avläsning av $|G_0(i\omega_c)| = 1$ som $\omega_c = 2$. Vi vill att den nya skärfrekvensen ska vara fem gånger så stor, d.v.s. $\omega_c^{\text{ny}} = 10$. Vid denna frekvens är $\arg G_0(i\omega_c^{\text{ny}}) = -180°$. Eftersom vi vill ha en fasmarginal på $\varphi_m^{\text{ny}} \geq 45°$ för det kompenserade systemet måste vi alltså öka fasen vid ω_c^{ny} med 45°. I diagrammet som visar sambandet mellan N och fasökningen i formelsamlingen ser vi att $N = 6$ är ett val som uppfyller detta. Den maximala fasökningen för kompenseringslänken sker vid $\omega = b\sqrt{N}$, och eftersom vi vill placera denna vid den nya skärfrekvensen får vi

$$\omega_c^{\text{ny}} = b\sqrt{N} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\omega_c^{\text{ny}}}{\sqrt{N}} = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

Slutligen måste vi se till att uppfylla $|G_0^{\text{ny}}(i\omega_c^{\text{ny}})| = |G_k(i\omega_c^{\text{ny}})G_0(i\omega_c^{\text{ny}})| = 1$, så att den önskade skärfrekvensen verkligen blir skärfrekvens, vilket kan göras genom att välja K_k lämpligt. Från formelsamlingen får vi att $|G_k(i\omega_c^{\text{ny}})| = K_k\sqrt{N}$, och avläsning i Bodediagrammet ger att $|G_0(i\omega_c^{\text{ny}})| = 0.1$. Skärfrekvensen blir alltså den önskade om

$$0.1 K_k \sqrt{N} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_k = 10/\sqrt{6}.$$

En kompenseringslänk som uppfyller specifikationerna är därmed

$$G_k(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN} = 10\sqrt{6}\frac{s+10/\sqrt{6}}{s+10\sqrt{6}} \approx 24.5\frac{s+4.08}{s+24.5}.$$