LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Automatic Control, Basic Course, FRTF05

Exam August 17, 2012, 8–13

Points and grades

All solutions must be well motivated. The whole exam gives 25 points. The number of points are presented after each problem. Preliminary grades:

Betyg 3: 12 points
4: 17 points
5: 22 points

Aids

Mathematical collections of formulae (e.g. TEFYMA), collections of formulae in automatic control, and calculators that are not programmed in advance.

Results

The results are presented through LADOK.

1. A system is given by the following differential equation

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = \dot{u} + u.$$

a. Determine the transfer function of the system. (1 p)

b. Write the system on state-space form. (1 p)

Solution

a. Laplace transformation av differential ekvationen ger (antag att alla initialtillstånd är 0)

$$(s^2 + 3s + 1)Y(s) = (s + 1)U(S) \Leftrightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{s + 1}{s^2 + 3s + 1}}_{G(s)} U(s).$$

b. En tillståndsrealisering av systemet hittas enklast med hjälp av någon av de kanoniska tillståndsformerna. Den styrbara kanoniska formen ges av

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. A nonlinear system is given by

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 + 1)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

a. Verify that $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u = 0$ is a staionary point. (1 p)

b. Linearize the system around the stationary point $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u = 0$. (1 p)

c. Is the system stable around the stationary point? (1 p)

Solution

a. När $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u = 0$ är $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$.

b. Introducera de nya variablerna

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \\ \Delta y &= y - y^0 \end{aligned}$$

Låt

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, u) &= -(x_2 + 1)x_1 \\ f_2(x_1, x_2, u) &= -x_2 + u \\ g(x_1, x_2, u) &= x_1 \end{aligned}$$

De partiella derivatorna blir

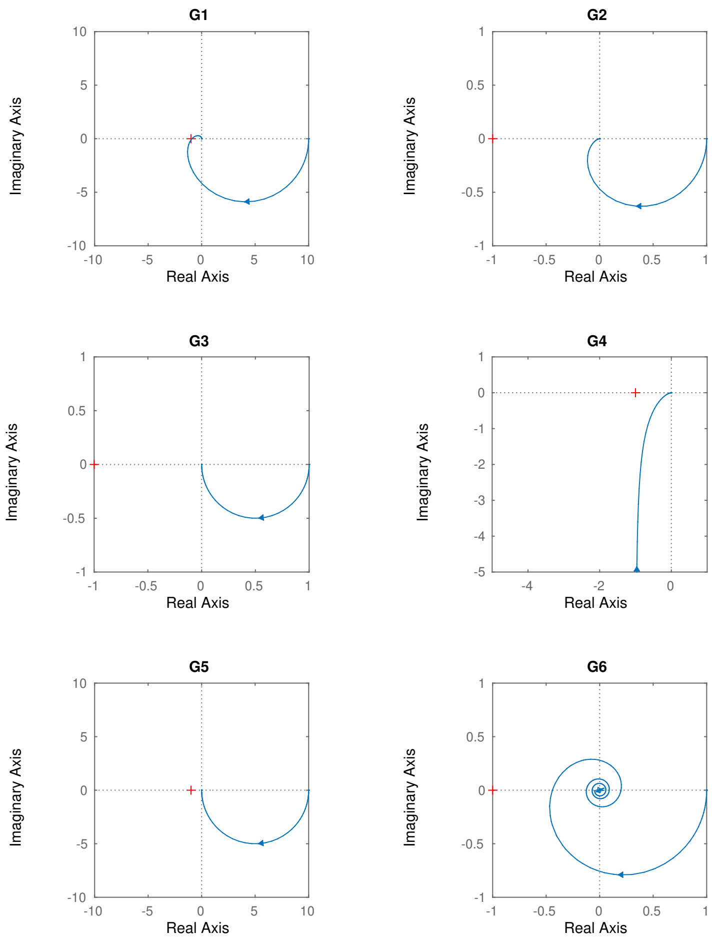
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= -(x_2+1) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -x_1 & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -1 & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= 1 \\
\frac{\partial g}{\partial x_1} &= 1 & \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0 & \frac{\partial g}{\partial u} &= 0
\end{aligned}$$

Det linjäriserade systemet runt punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0, 0, 0)$ ges då av

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta x}{dt} &= \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \Delta x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u \\
\Delta y &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \Delta x
\end{aligned}$$

c. A-matrisens egenvärden är båda -1, så systemet är stabilt runt den givna stationära punkten.

3. Figure 1 and 2 show Nyquist plots and step responses, respectively, for six different systems. Pair the Nyquist plots with the corresponding step responses. Don't forget to motivate your answers. (3 p)

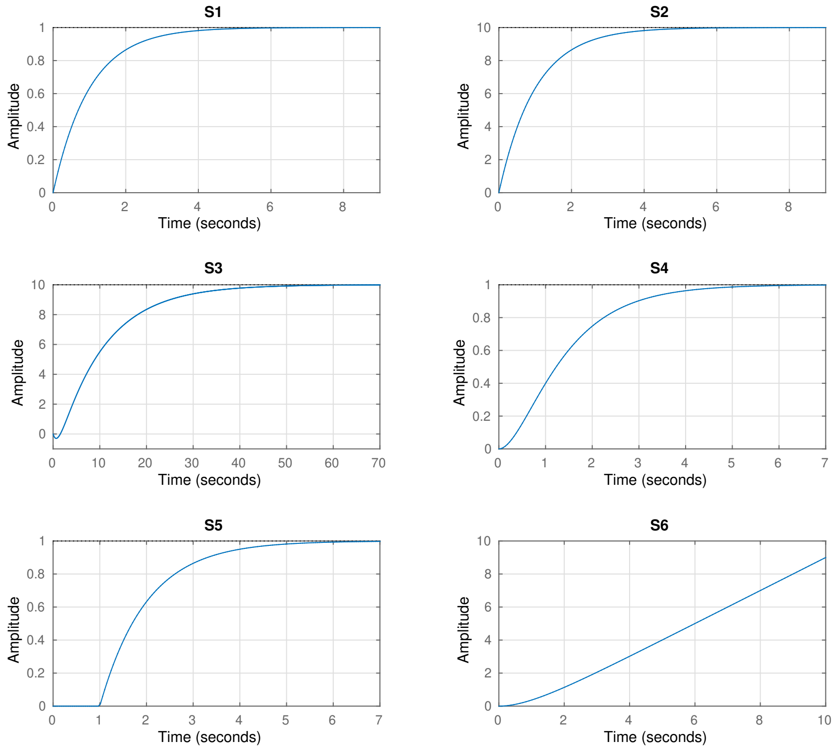


Figur 1 Nyquist plots in Problem 3

Solution

Har inte uppdaterat denna än, väntar på uppdatering ifrån Guatham....

- G2 = S4. Andra ordningens system med statisk förstärkning 1.
- G3 = S1. Första ordningens system med statisk förstärkning 1.
- G4 = S6. Systemet har en integrator.
- G5 = S2. Första ordningens system med statisk förstärkning 1.
- G6 = S5. Första ordningens system med tidsfördröjning.
- G1 = S3. Statisk förstärkning 10.



Figur 2 Step responses in Problem 3

4. Determine whether the statements **a-f** are true or false, and motivate why. Points are only given for correctly motivated answers. (3 p)

a. A lag compensator can be used to reduce stationary errors.

b. A Kalman filter can always be used to estimate all states in a system.

c. A first order system without delay has infinite gain margin.

d. If the integral time T_i of a PID controller is reduced, the low-frequency gain of the controller is increased.

e. When a process is controlled by a P controller, there will always be a stationary error after step changes of the setpoint.

f. When the magnutude of the measurement noise is high, the gain K of the Kalman filter should be chosen large, i.e. the observer should be designed to be fast.

Solution

a. Sant, en fasretarderande länk har hög förstärkning vid låga frekvenser vilket medför att stationära fel minskar.

b. Falskt, systemet måste vara observerbart för att samtliga tillstånd ska kunna skattas.

c. Sant, ett första ordningens system har bara en pol vilket medför att fasen inte understiger -90 grader. Amplitudmarginalen blir därför oändlig.

d. Sant, minskad integraltid T_i medför en ökad integralverkan och därmed ökad förstärkning vid låga frekvenser.

e. Falskt, om processen innehåller en integrator erhålls inga stationära fel vid en stegändring i börvärdet.

f. Falskt, vid stort mätbrus bör man lita mer på sin processmodell än sina mätsignaler. Detta motsvarar att K väljs litet.

5. Calle is to design a controller for the following system

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

a. Is the system controllable? (1 p)

b. Design a state feedback on the form $u = -Lx$ so that the closed-loop system gets a double pole in -2. (2 p)

c. One can not measure the whole state vector, but only one of the states. The goal of the control is to place the poles, there is no requirement on the process output. Therefore, Calle can decide which state to measure. Help Calle to make the right choice of state to measure, and motivate why. (1 p)

d. Design a Kalman filter with poles that are twice as fast at the poles of the closed-loop system. (2 p)

Solution

a. Systemets styrbarhetsmatrix beräknas till

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

W_c har full rank eftersom kolonnerna är linjärt oberoende, alltså är systemet styrbart.

b. Slutna systemets poler ges av

$$|sI - (A - BL)| = \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ l_1 & s-3+l_2 \end{vmatrix} = s^2 + (-4 + l_2)s + 2l_1 + 3 - l_2$$

Vilket ska jämföras med $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$. Detta ger $l_1 = 4.5$ och $l_2 = 8$.

c. y bör väljas som $y = x_1$ eftersom system då är observerbart.

d. Kalman filtrets poler ges av

$$|sI - A + KC| = \begin{vmatrix} s-1+k_1 & -2 \\ k_2 & s-3 \end{vmatrix} = s^2 + (-4 + k_1)s + 2k_2 + 3 - 3k_1$$

Vilket ska jämföras med $(s+4)^2 = s+8s+16$. Detta ger $k_1 = 12$ och $k_2 = 24.5$.

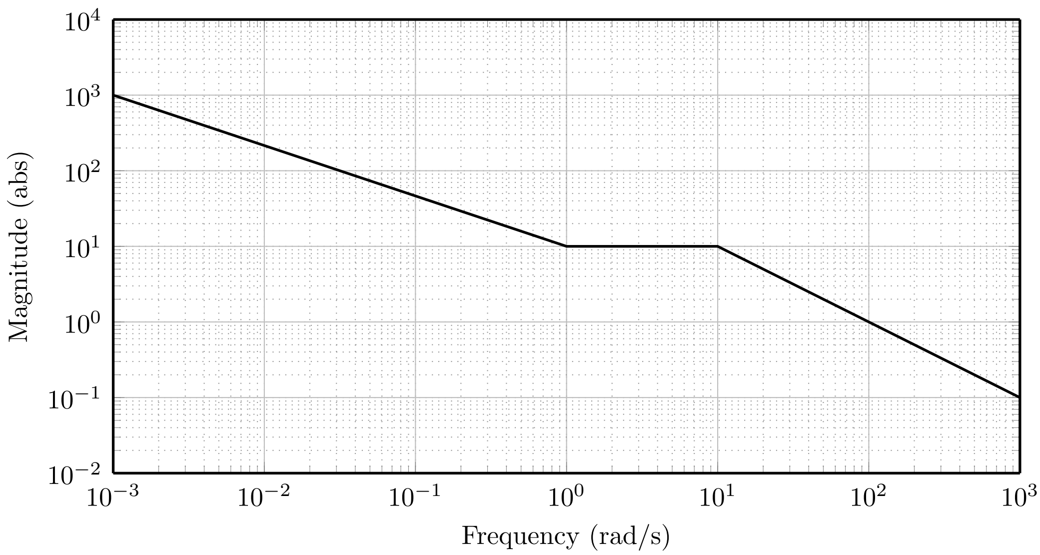
6. The transfer function of a system is given by

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s/10+1)}.$$

Plot the asymptotes for $|G(i\omega)|$. Use the form on the last page and submit it together with your solutions. (2 p)

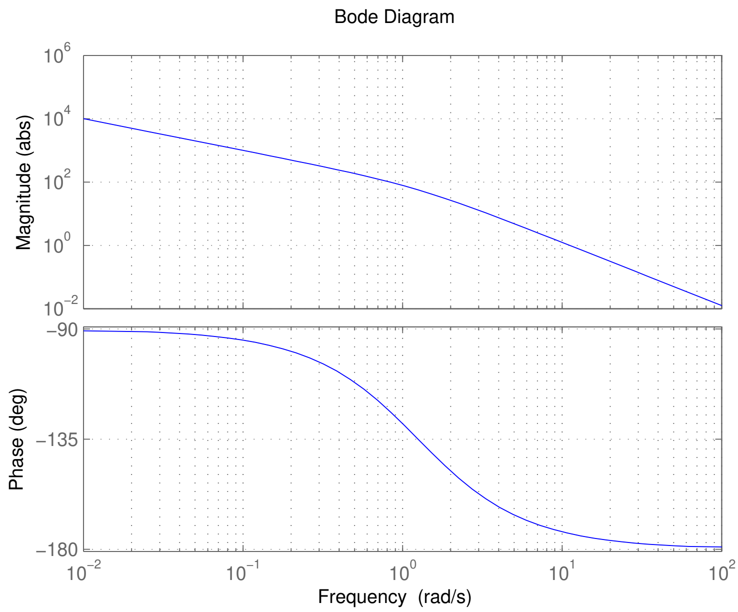
Solution

Lågfrekvens asymptoten är $G(s) \approx \frac{10}{s}$ och har beloppet 10^2 för $i\omega = 0.1$. Systemet har sedan ett nollställe i $s = -1$ som gör att beloppets lutning bryts upp med lutning $+1$ så att lutningen blir 0 vid $\omega = 1$. Systemet har även en pol i $s = 10$, vilket gör att beloppets lutning bryts ner med -1 så att lutningen blir -1 vid $\omega = 10$. Asymptoten visas i Figur 3.



Figur 3 Bodediagram för Problem 6

7. The Bode plot of a loop transfer function is shown in Figure 4.



Figur 4 Bode plot for Problem 7

a. Is the closed-loop system stable? (1 p)

b. For the closed-loop system, a reference change in form of a ramp gives a stationary error. Design a compensator that reduces this error a factor of 10. (2 p)

Solution

a. När kretsöverföringsfunktionens fas är -180 grader, är magnituden mindre än 1, så det slutna systemet är stabilt.

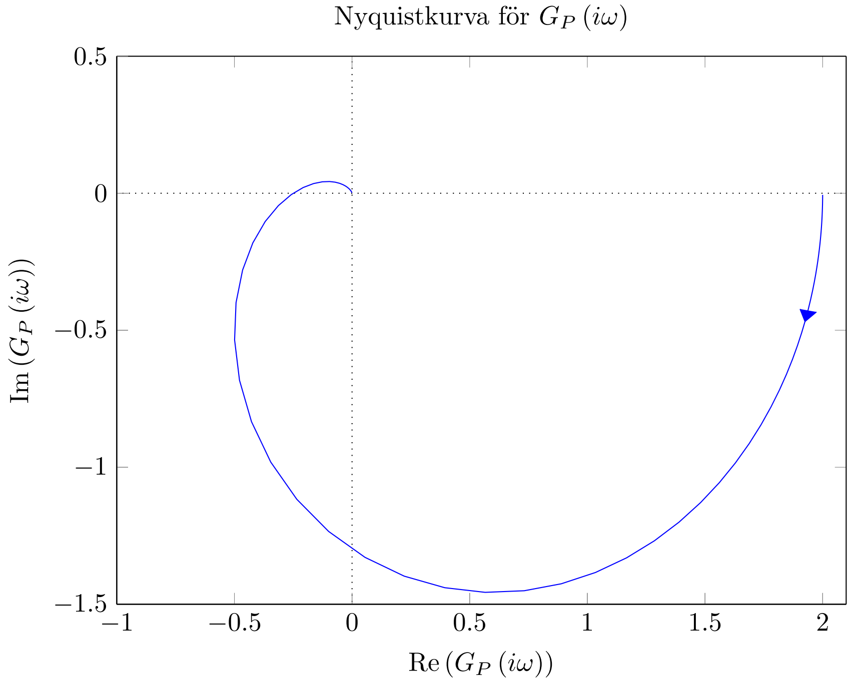
b. För att få ett mindre stationärt fel, väljer vi en fasretarderande länk. Vi vill minska det stationära felet med en faktor 10, så $M = 10$. Ifrån Bodediagrammet fås $\omega_c = 10.1$, så $a = 0.1\omega_c \approx 1$. Kompensationslänken blir således

$$G_K(s) = \frac{s+1}{s+0.1}$$

8. A process transfer function $G_P(s)$ is given on the form

$$G_P(s) = \frac{K_P}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^n}$$

The Nyquist plot of G_P is shown in Figure 5.

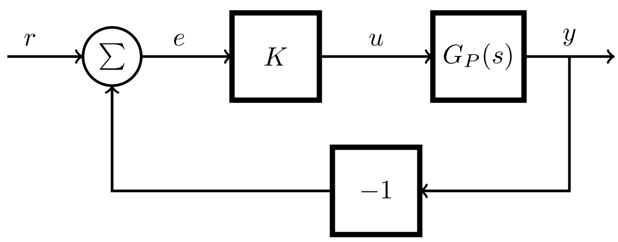


Figur 5 Nyquist plot of process G_P in Problem 8.

a. Determine the static gain K_P of the process and the order n. (1 p)

b. Determine the gain margin A_m. (0.5 p)

c. Process $G_P(s)$ is controlled by a proportional controller with gain $K > 0$, according to Figure 6. Determine the least possible stationary error $e(\infty)$ that can be obtained when r is a unit step. (1.5 p)



Figur 6 The closed-loop system in Problem 8c.

Solution

a. Processens statiska förstärkning, K_P, utläses ur Nyquistkurvan till 2, och ordningen n till 3 (fasen -270°visar på att systemet har tre poler).

b. Amplitudmarginalen, A_m, utläses ur Nyquistkurvan till 4 (vilket också är det exakta värdet som går att bestämma analytiskt om man löst uppgift 8a fullständigt).

c. Överföringsfunktionen från referensen r till felet e är

$$G_{r\to e}(s) = \frac{1}{1 + KG_P(s)}.$$

För alla värden på K sådana att det återkopplade systemet är stabilt, ges det stationära felet ,$e(\infty)$, av

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sG_{r\to e}(s)U(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1 + KG_P(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1 + KG_P(0)} = \frac{1}{1 + 2K}$$

Amplitudmarginalen, $A_m = 4$, visar högsta möjliga förstärkningen K hos P-regulatorn som fortfarande ger ett stabilt system. Därmed fås ett lägsta värde på $e(\infty)$ som

$$e(\infty) > \frac{1}{1 + 2 \cdot 4} = \frac{1}{9}.$$

Personal identifier: ______________________

Form for the Bode plot in Problem 6

Remove this page from the exam and submit it togher with your solutions.