LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 19 mars 2019 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK

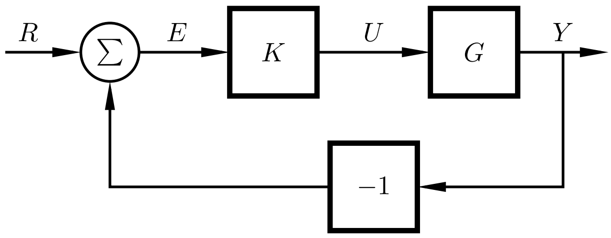
1. Ett system beskrivs av följande differentialekvation:

$$\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = \dot{u} - 3u$$

a. Vad är systemets överföringsfunktion (från u till y)? (1 p)

b. Bestäm systemets poler och nollställen. Är systemet asymptotiskt stabilt? Glöm ej att motivera ditt svar. (1 p)

c. Systemet regleras med en P-regulator med förstärkning K i sluten loop, se figur 1. För vilka värden på K blir det slutna systemet asymptotiskt stabilt? (Betrakta både positiva och negativa värde för K). (2 p)



Figur 1: Slutet system för uppgift 1.c.

d. Anta att vi gör en ändring på referenssignalen r med ett enhetssteg. Räkna ut det stationära felet e. Hur litet kan felet göras med P-regulatorn? (2 p)

e. Vilken regulatorstruktur kan garantera att det stationära felet går mot noll? (1 p)

Solution

a. Med användning av Laplace-transform för differentialekvationen (initialvärden försummade), får vi $Y(s)(s^2 + 8s + 16) = U(s)(s - 3)$.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{s-3}{s^2+8s+16} \\ &= \frac{s-3}{(s+4)(s+4)} \end{aligned}$$

b. Nollställe: $s = 3$
Poler: $s = -4, -4$

Båda polerna har negativ realdel, och system är följdaktligen asymptotiskt stabilt.

c. Överföringsfunktionen för det slutna systemet blir $G_{cl}(s) = Y(s)/R(s) = KG(s)/(1 + KG(s))$:

$$\begin{aligned}
G_{cl}(s) &= \frac{KG(s)}{(1 + KG(s))} \\
&= \frac{K(s-3)}{(s+4)^2 + K(s-3)} \\
&= \frac{K(s-3)}{s^2 + s(8+K) + (16-3K)}
\end{aligned}$$

Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt om båda polerna ligger (strikt) i det vänstra halvplanet (dvs de har negativ realdel). Detta är uppfyllt endast om både $a_1, a_2 > 0$ för det karakteristiska polynomet $s^2 + a_1 s + a_2$. Av detta följer vilkoren

$$\begin{aligned}
8 + K &> 0 \\
K &> -8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16 - 3K &> 0 \\
16 &> 3K \\
-8 < K &< \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

d. Det stationära felet efter stegsvar kan beräknas med hjälp av slutvärdesteoremet. Överföringsfunktionen från referens till fel är:

$$G_{re}(s) = \frac{(s+4)^2}{(s+4)^2 + K(s-3)}$$

Slutvärdesteoremet ger att stegsvarets slutvärde är av $G_{re}(s)$ utvärderat i $s = 0$, givet att systemet är stabilt:

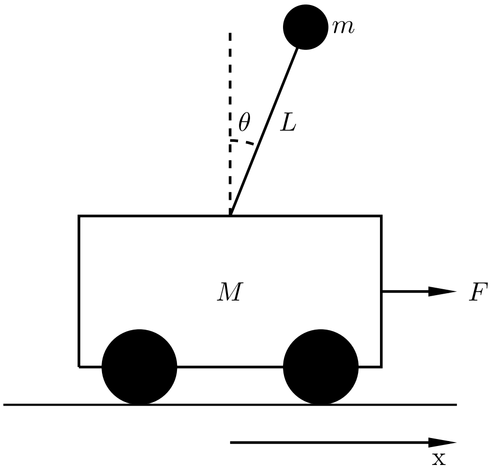
$$G_{re}(0) = \frac{16}{16 - 3K}$$

För att minimiera felet vill vi därför maximera nämnaren inom stabilitetsintervallet. Detta ges av så litet K som möjligt i intervallet, alltså så nära -8 som möjligt (utan att vara -8). Detta ger ungefärlig statisk förstärkning på $e(\infty) = 16/40 = 0.4$.

e. En integrerande regulator skulle garantera noll i stationärt fel, givet det slutna systemet är asymptotiskt stabilt.

2. En förenklad modell av en inverterad pendel (se Figur 2) beskrivs av följande ekvationer

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{-mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + F + mg\cos(\theta)\sin(\theta)}{M + m\sin(\theta)^2} \\
\ddot{\theta} &= \frac{mL\cos(\theta)\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + F\cos(\theta) + (M+m)g\sin(\theta)}{L \cdot (M + m\sin(\theta)^2)}
\end{aligned}$$



Figur 2: Inverterad pendel, håll pendeln upprätt genom att applicera en kraft på vagnen.

a. Ställ upp tillståndsformen med tillståndsvektorn $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})^T$ och styrsignalen $u = F$. (0.5 p)

b. En lämplig punkt att linjärisera kring är $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, 0)^T$ och $u^0 = 0$. Motivera varför detta är ett rimligt val. (0.5 p)

c. Linjärisera systemet kring den valda punkten och svara med systemmatriserna A och B. (2 p)

Solution

a. Vi använder $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})^T$ och $u = F$ vilket ger oss

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2 \\
\dot{x_2} &= \frac{-mL\sin(x_3)x_4^2 + u + mg\cos(x_3)\sin(x_3)}{M + m\sin(x_3)^2} \\
\dot{x_3} &= x_4 \\
\dot{x_4} &= \frac{mL\cos(x_3)\sin(x_3)x_4^2 + u\cos(x_3) + (M+m)g\sin(x_3)}{L \cdot (M + m\sin(x_3)^2)}
\end{aligned}
$$

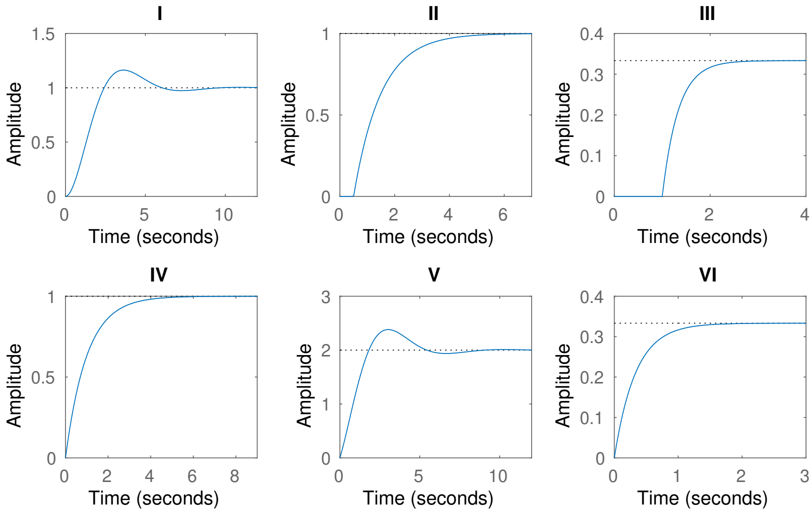
b. För det första är det en stationär punkt vilket enkelt kan kontrolleras.

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2 = 0 \\
\dot{x_2} &= \frac{-mL\sin(0)0^2 + 0 + mg\cos(0)\sin(0)}{M + m\sin(0)^2} = 0 \\
\dot{x_3} &= x_4 = 0 \\
\dot{x_4} &= \frac{mL\cos(0)\sin(0)0^2 + 0\cos(0) + (M+m)g\sin(0)}{L \cdot (M + m\sin(0)^2)} = 0
\end{aligned}
$$

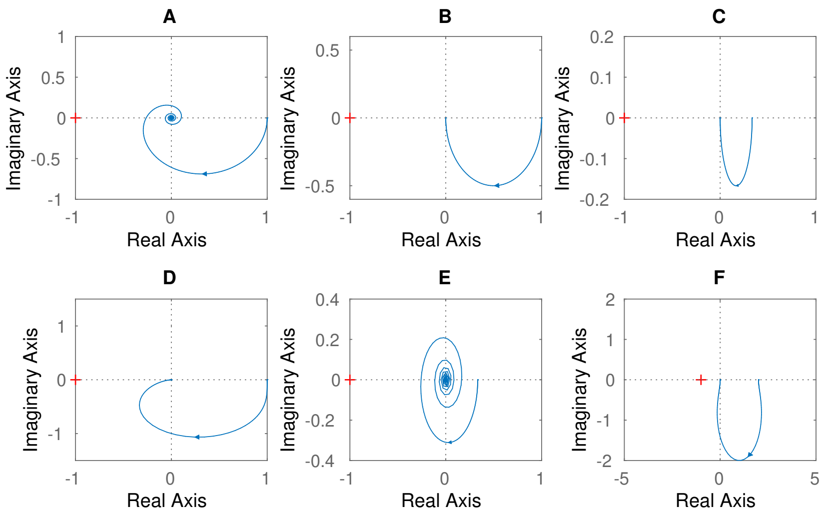
Det finns dock andra stationära punkter, men vi vill välja en som är nära det önskade tillståndet för systemet så att vi får bra reglering där. Det önskade tillståndet är stilla vagn med pendel rakt upp, d.v.s. $x_2 = x_3 = x_4 = u = 0$ och sen kommer x_1 inte påverka hur linjäriseringen ser ut i slutändan så 0 är ett rimligt val att centrera på.

c. Derivering ger

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{ML} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{ML} \end{bmatrix}$$



Figur 3: Stegsvar till problem 3



Figur 4: Nyquistdiagram till problem 3

3. Matcha varje överföringsfunktion nedan med ett nyquistdiagram i Figur 3 och ett stegsvar i Figur 4. Motivera varje val. (3 p)

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$G_2(s) = \frac{e^{-s}}{s+3}$$
$$G_3(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

Solution

G_1 är en första ordningens process utan tidsfördröjning och statisk förstärkning

1. Det finns bara IV som passar bland stegsvaren och B bland Nyquistdiagrammen.
G_2 är en första ordningens process med tidsfördröjning på 1 sekund och statisk förstärkning 1/3. Det finns bara III som passar bland stegsvaren och E bland Nyquistdiagrammen.
G_3 är en andra ordningens process med statisk förstärkning 2 och ett nollställe. Det finns bara V som passar bland stegsvaren och bland Nyquistdiagrammen så är F den enda med statisk förstärkning 2.

G_1 - IV - B
G_2 - III - E
G_3 - V - F

4. Här kommer ett antal påståenden. Du ska avgöra och motivera om de är sanna eller falska. Vi utgår från systemet

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

a. $G(s)$ är ett första ordningens system. (0.5 p)

b. Den givna informationen är tillräcklig för att avgöra om $G(s)$ är ett asymptotiskt stabilt system. (0.5 p)

c. Om vi skickar in $u(t) = \sin(3t)$ i systemet så får vi i stationäritet ut en sinussignal med dubbla vinkelfrekvensen, d.v.s $y(t) = A\sin(6t + \varphi)$. (0.5 p)

d. Återkoppling med en PI-regulator gör att vi kan placera slutna systemets poler precis var vi vill genom att kalibrera PI-regulatorns parametrar. (1.5 p)

Solution

a. Falskt, det är ett andra ordningens system.

b. Sant, det är tillräckligt. Systemet är asymptotiskt stabilt eftersom alla poler ligger i vänster halvplan.

c. Falskt, amplitud och fas kan ändras men vinkelfrekvensen är samma.

d. Falskt, systemet har två poler och en PI-regulator har en vilket ger tre poler för det slutna systemet. Men vi har bara två parametrar och kan därför inte styra tre poler. Nämnarpolynomet för slutna systemets överföringsfunktion blir

$$s^3 + (4+K)s^2 + (\frac{1}{T_i} + 2K + 4)s + 2K$$

vilket också visar detta tydligt. Eftersom både den konstanta och den kvadratiska termen enbart beror på K så kommer vi aldrig kunna styra både dem hur vi vill.

5. Studera Bodediagrammet för kretsöverföringsfunktionen för systemet givet i Figur 5 och svara på frågorna.

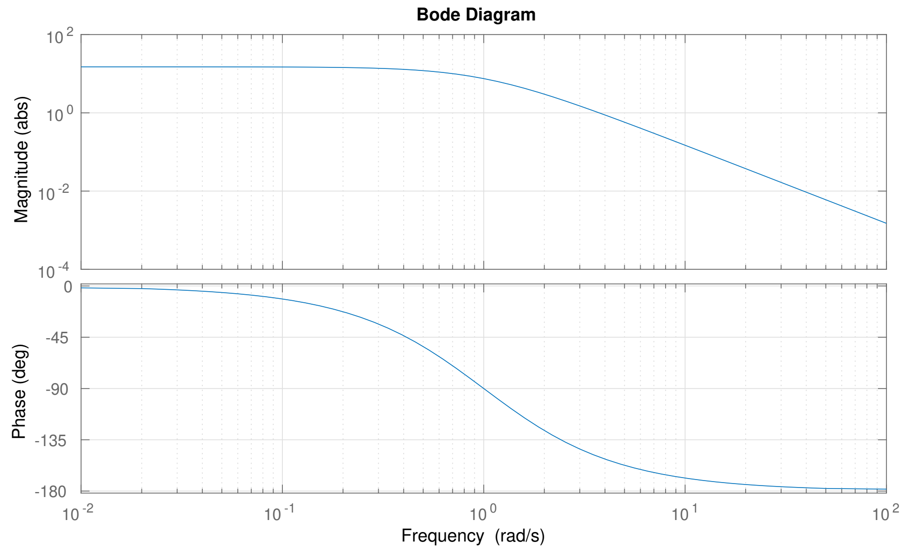
a. Ta fram kretsöverföringsfunktionen för systemet. (1 p)

b. Ta fram fas och amplitudmarginal för systemet. (1 p)

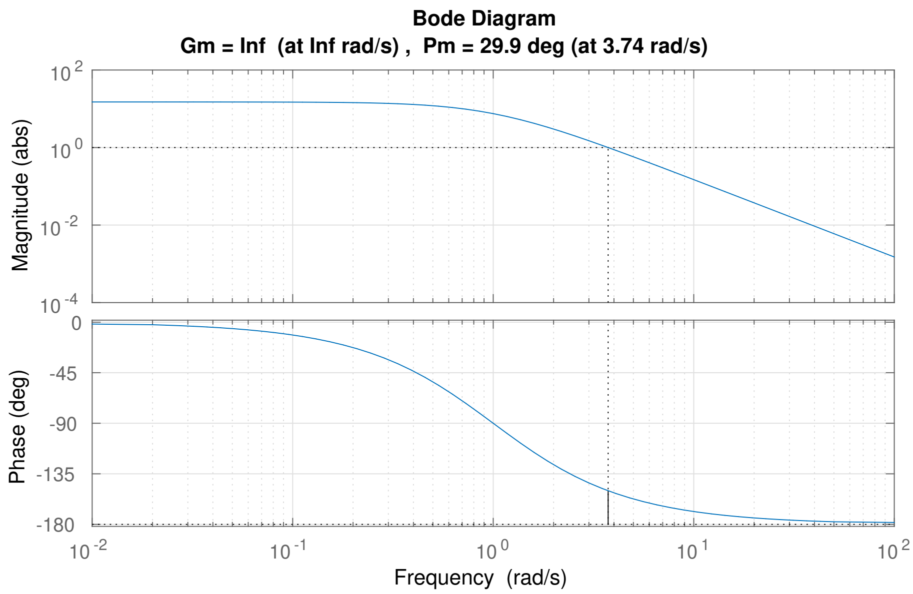
c. Systemet har en ganska liten fasmarginal. Inför en kompenseringslänk som gör att systemet får en fasmarginal på 50° utan att förändra skärfrekvensen. (2 p)

d. Hur stor tidsfördröjning klarar det kompenserade systemet av innan det blir instabilt? (1 p)

Solution



Figur 5: Kretsöverföringsfunktionens bodediagram för problem 5.



Figur 6: Marginaler för problem 5

a. Två poler i $s = -1$, inga nollställen. En statisk förstärkning på ca. 15.

$$G(s) = \frac{15}{(s+1)^2}$$

b. I Figur 6 ser vi marginalerna. Vi får $\varphi_m(i\omega_c) \approx 30$ för $\omega_c \approx 3.7$ och $A_m = \infty$ eftersom vi aldrig korsar negativa reella axeln.

c. Vi har $\omega_c = 3.7$ och vi vill ha $\hat{\varphi}_m(i\omega_c) = 50$ vilket innebär att $\Delta\varphi = 50 - 30 = 20$. Avläsning i formelsamlingen ger då $N = 2$ och vi vill ha maximal ökning vi skärfrekvensen så $\omega = \omega_c$ vilket ger $b = \omega/\sqrt{N} = 2.6$. Vi vill behålla samma skärfrekvens vilket innebär att förstärkningen ska vara ett vid skärfrekvensen.

Från formelsamlingen har vi att förstärkningen är $K_K\sqrt{N}$, detta ger då att $K_K = 1/\sqrt{N}$. Vi får då länken

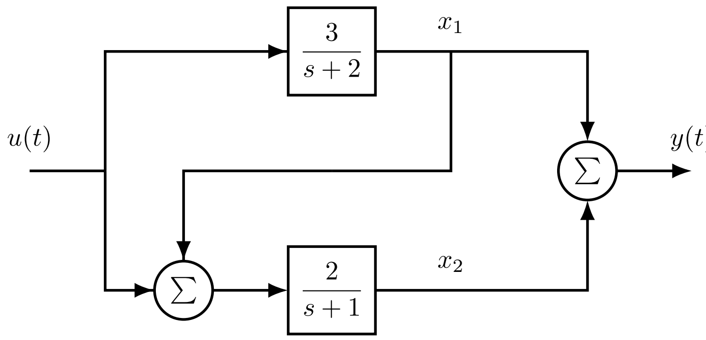
$$G_K(s) = 1.4\frac{s + 2.6}{s + 5.2} = 0.7\frac{1 + s/2.6}{1 + s/5.2}$$

d. Dödtidsmarginalen för ett system ges av $L = \varphi_m/\omega_c = 0.24$ för $\varphi_m = 50\ ^\circ = 0.87$ rad och $\omega_c = 3.7$ rad/s. Detta betyder att vi kan ta en fördröjning på 0.24 s innan vid når gränsen för instabilitet.

6. Studera den process som beskrivs av blockdiagrammet i Figur 7. En återkoppling som placerar polerna i vänster halvplan med frekvens (avstånd till origo) $\omega_0 = 6$ rad/s och vinkel 45 ° mot negativa reella axeln har redan skapats. Tyvärr framkom det att endast summan av tillstånden gick att avläsa. Du har nu blivit anlitad att skapa ett Kalmanfilter för att skatta tillstånden så att den redan skapade tillståndsåterkopplingen kan användas.

a. Ta fram tillståndsformen för systemet och kontrollera att det är ett observerbart system. (2 p)

b. Designa ett Kalmanfilter som är lämpligt för denna process och den givna tillståndsåterkopplingen. (2 p)



Figur 7: Blockdiagram för problem 6.

Solution

a. Börja med att ta fram systemet på tillståndsform

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{3}{s+2}U \\
\dot{x}_1 &= -2x_1 + 3u \\
X_2 &= \frac{2}{s+1}(X_1 + U) \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 + 2u \\
Y &= X_1 + X_2 \\
y &= x_1 + x_2 \\
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

För att kolla att detta är observerbart testar vi att observerbarhetsmatrisen har en nollskiljd determinant.

$$
\begin{aligned}
W_o &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\det(W_o) &\neq 0
\end{aligned}
$$

b. Inför $\hat{x}$ som våra tillstånd i kalmanfiltret och inför skattningsfelet $K(y - C\hat{x})$.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\
\dot{\hat{x}} &= (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky \\
s\hat{X} &= (A - KC)\hat{X} + BU + KY \\
\hat{X} &= (sI - A + KC)^{-1}(BU + KY)
\end{aligned}$$

Så vi vill nu välja K så att polerna hamnar rätt. En tumregel är att ha dubbelt så snabba poler på filter jämfört med återkopplingen så vi väljer polerna med $\omega_0 = 12$ och $\zeta = \cos 45 = 1/\sqrt{2}$ vilket ger polynomet $s^2 + 12\sqrt{2}s + 144$.

$$\begin{aligned}
\det(sI - A + KC) &= \begin{vmatrix} s + 2 + k_1 & k_1 \\ k_2 - 2 & s + 1 + k_2 \end{vmatrix} \\
&= (s + 2 + k_1)(s + 1 + k_2) - k_1(k_2 - 2) \\
&= s^2 + (3 + k_1 + k_2)s + 2 + 3k_1 + 2k_2
\end{aligned}$$

Identifiering med det önskade polynomet ger ekvationerna

$$\begin{cases} 3 + k_1 + k_2 = 12\sqrt{2} \\ 2 + 3k_1 + 2k_2 = 144 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 148 - 24\sqrt{2} \\ k_2 = 36\sqrt{2} - 151 \end{cases}$$