



LUNDS
UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 21 april 2022 kl 8-13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng

4: lägst 17 poäng

5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

LYCKA TILL!

Facit uppdaterad 15 mars 2023. Med reservation för skrivfel i facit. Maila gärna emma.tegling@control.lth.se om du hittar något fel eller har frågor om någon lösning!

1. En process kan beskrivas med den olinjära differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + \frac{a_2}{\sqrt{y(t)}} = u^2(t)$$

med konstanterna $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$.

- a. Skriv systemet på tillståndsform. (1 p)
- b. Beräkna den stationära punkten då $u(t) = 1$. (0.5 p)
- c. Linjärisera systemet kring den stationära punkten från b..
Om du inte har ett svar från b. kan du linjärisera kring en okänd stationär punkt x_0, u_0, y_0 . (1.5 p)
- d. Är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt om koefficienterna $a_1 = 2$, $a_2 = 3$? (1 p)

Solution

- a. Inför tillstånden $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$. Då ges systemet på tillståndsform av:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -a_1 x_2 - \frac{a_2}{\sqrt{x_1}} + u^2 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= x_1 &= g(x_1, x_2, u) \end{aligned}$$

- b. Den stationära punkten ges gå derivatorna är 0:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}_1^0 = x_2^0 \\ 0 &= \dot{x}_2^0 = -a_1 x_2^0 - \frac{a_2}{\sqrt{x_1^0}} + (u^0)^2 \\ y^0 &= x_1^0 \end{aligned}$$

Från den första ekvationen fås direkt $x_2^0 = 0$ och med detta insatt i den andra ekvationen och med $u_0 = 1$ fås: $1 = \frac{a_2}{\sqrt{x_1^0}} \iff x_1^0 = a_2^2$. Slutligen fås $y^0 = x_1^0 = a_2^2$

Den stationära punkten ges alltså av

$$(x_1^0, x_2^0, u^0, y^0) = (a_2^2, 0, 1, a_2^2)$$

- c. Partialderivera f_1 , f_2 och g . Insättning av den stationära punkten ovan ger:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-a_2}{2x_1^{3/2}}|_{x_1^0=a_2^2} & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2a_2^2} & -a_1 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2u|_{u^0=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Inför de nya tillstånden som avvikelser från den stationära punkten: $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$. Då fås det linjariserade systemet som:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\
\Delta y &= C\Delta x
\end{aligned}$$

med matriserna från ovan.

d. Överföringsfunktionen $G(s)$ ges av:

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{-1}{2a_2^2} & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s + a_1) - 1/(2a_2^2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ \frac{1}{2a_2^2} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{s^2 + a_1 s - 1/(2a_2^2)}
\end{aligned}$$

Då $a_1 = 2 > 0$ och $a_2 = 3 > 0$ är inte alla koefficienter i nämnarens polynom av andra graden positiva. Därmed är systemet *instabilt* enligt s. 12 i Formelsamlingen.

För att lösa uppgiften behöver dock givetvis inte överföringsfunktionen tas fram. Insättning av a_1, a_2 i A ger

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/18 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matrisens egenvärden fås ur ekvationen $\det(sI - A) = 0$, dvs

$$\det(sI - A) = s(s + 2) - 1/18 = s^2 + 2s - 1/18 = 0.$$

Eftersom andragradspolynomets koefficienter ej är positiva har ekvationen ej alla rötter i vänster halvplan. Därmed är systemet instabilt.

TIPS! När matriser är på den form som A har, kallad companion form på engelska, är deras karakteristiska ekvationer enkla att läsa av direkt ur matrisen. Se även uppgift 4, och formelsamlingen s. 4. Att inse detta kan spara tid.

2. Blodsockernivån i människokroppen regleras bland annat genom att det utsöndras insulin som hjälper cellerna att ta upp socker från blodet. Detta motverkar de variationer i blodsockret som annars uppkommer på grund av matintag, fysisk aktivitet och så vidare. För den som har diabetes så fungerar inte detta system och blodsockernivån blir farligt hög utan behandling med insulin.
- a. Betrakta blodsockerregleringen, så som den är beskriven ovan, som ett reglertekniskt problem och föreslå vad som är
 - i. mätsignal (alt. utsignal) y
 - ii. styrsignal (alt. insignal) u
 - iii. referenssignal r
 - iv. störsignal d

Motivera ditt svar. (1 p)

- b. Man har en automatisk insulinpump för vilken man vill designa en PID-regulator på formen:

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right).$$

Eftersom kroppens blodsockerreglering är ett komplext system saknar man en modell för dynamiken. Man använder sig därför av ett stegsvarsexperiment, som visas i figur 1.¹ Här har man använt ett enhetssteg i insignalen:²

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Ta fram PID-regulatorns parametrar enligt lambdametoden. Låt $\lambda = T$. (1.5 p)

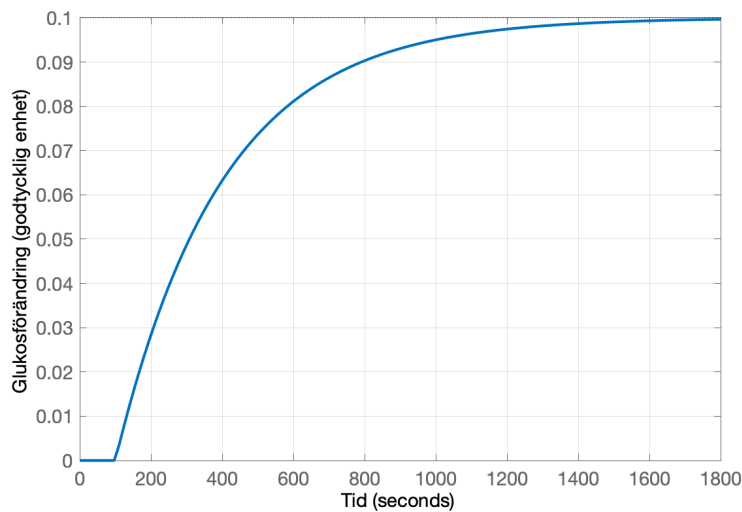
Solution

- a.
 - i. mätsignal (alt. utsignal) y : det vi vill styra/reglera i processen, d.v.s. *blodsockernivån (i blodet)*.
 - ii. styrsignal (alt. insignal) u : det vi styr med hjälp av, d.v.s. *insulinutsöndringen*.
 - iii. referenssignal r : önskat värde på mätsignalen, det vi vill åstadkomma, dvs *önskad eller normal blodsockernivå*.
 - iv. störsignal d : sådant som påverkar processen och mätsignalen, men som vi inte kan råda över i regleringen, dvs *matintag, fysisk aktivitet etc.*

Kommentar: Mätbrus är självklart också en typ av typ störsignal, men det finns inte beskrivet i texten. Mätbruset är också sekundärt i sammanhanget, eftersom denna reglertekniska process är ett typiskt regulatorproblem där målet är att hålla en jämn blodsockernivå trots stora störningar i form av sockerintag eller -förbränning.

¹Detta stegsvar är artificiellt konstruerat för denna tenta, och motsvarar inte nödvändigtvis den verkliga dynamiken.

²Signalen $u(t)$ anges i en godtycklig enhet. Du kan betrakta både insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$ i stegsvaret som enhetslösa när du löser uppgiften!



Figur 1: Stegsvär för PID-regulator-design enligt lambdametoden i uppgift 2-b. Ett enhetssteg har använts i insignalen. Du kan betrakta både in- och utsignal som enhetslösa när du löser uppgiften.

b. Använd formelsamlingen, sidan 17. Den efterfrågade PID-regulatorn är given på *parallellform* och vi använder $\lambda = T$. Vi läser av ur stegsvaret:

- Dödtid $L = 100$ sekunder.
- Tidskonstant till 63% av maxvärdet: $400 - 100 = 300$ sekunder.
- $\Delta y = 0.1$
- $\Delta u = 1$ (givet i uppgiften)

Insättning ger:

$$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u} = 0.1 \implies K = \frac{1}{0.1} \frac{L/2 + T}{L/2 + T} = 10,$$

$$T_i = 300 + 100/2 = 350,$$

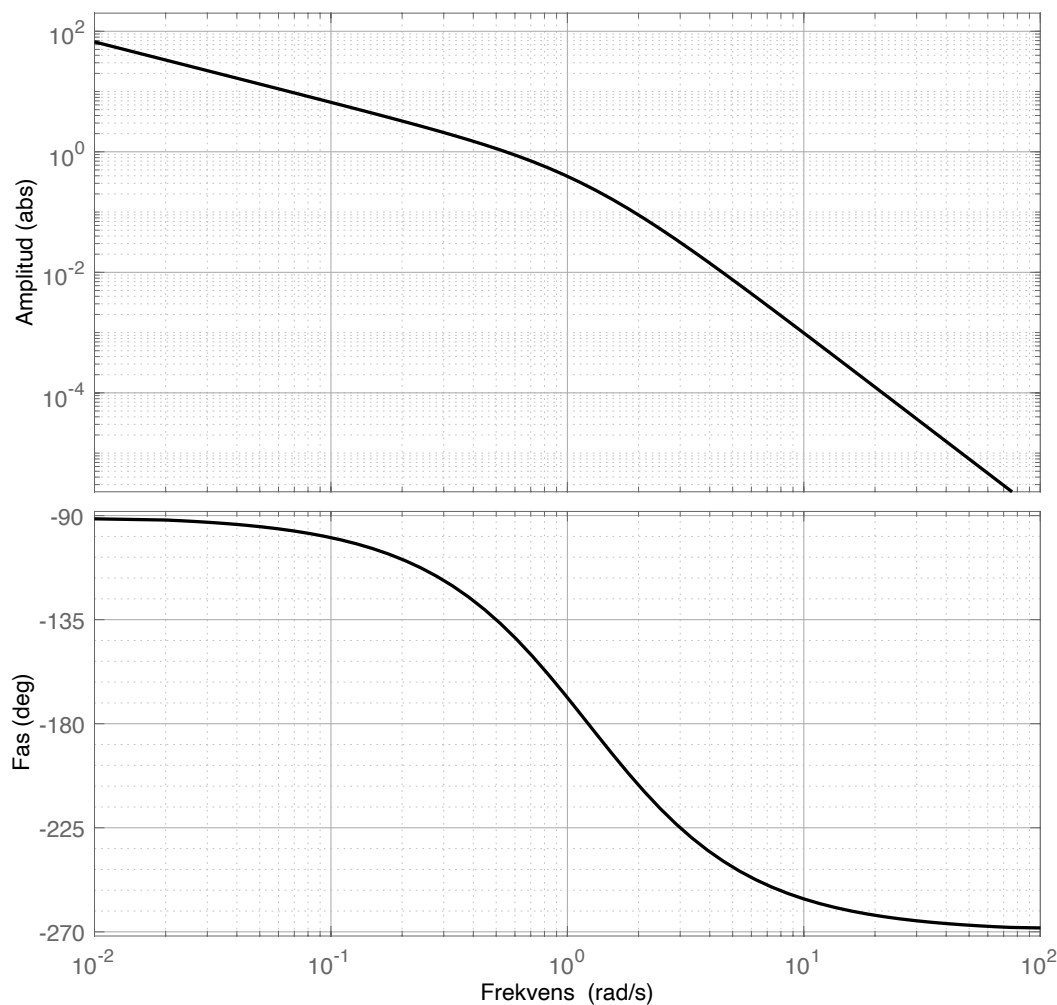
$$T_d = \frac{300 \cdot 100}{100 + 2 \cdot 300} = \frac{300}{7} \approx 43.$$

3. Betrakta en process $G_P(s)$, vars Bodediagram visas i Figur 2.

Svara på om vart och ett av följande påståenden är **sant** eller **falskt**. Motivera ditt svar noga.

Poängfördelning: påstående (i)-(iv) ger 0.5 p vardera, (v)-(vi) ger 1 p vardera.

- i. Processens överföringsfunktion har minst ett nollställe.
- ii. Om processen återkopplas med en P-regulator med förstärkning $K = 8$ blir det slutna systemet instabilt.
- iii. Processen skulle varit snabbare om skärfrekvensen vore $\omega_c = 1$ rad/s istället för nuvarande skärfrekvens.



Figur 2: Bodediagram för uppgift 3.

- iv. Med en fasretarderande kompensator

$$G_K(s) = \frac{s + a}{s + a/M},$$

där man valt $a = 0.1\omega_c$ och $M > 1$ (ω_c är processens skärfrekvens), så garanteras att den resulterande kretsöverföringsfunktionen $G_K(s)G_P(s)$ har en fasmarginal på minst 40° .

- v. Om processen återkopplas med en P-regulator med förstärkning $K = 1$ fås inget stationärt fel i utsignalen vid ett steg i referenssignalen.

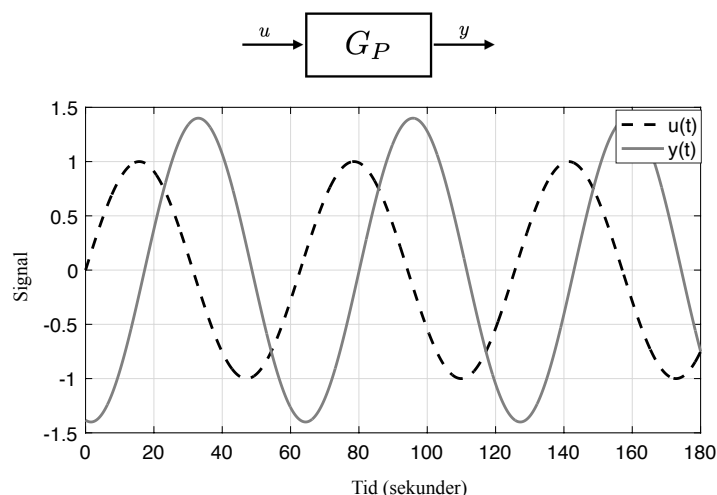
Överföringsfunktionen från referenssignal $r(t)$ till mätsignal $y(t)$ ges i detta fall av $G_{CL}(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_P(s)}$.

- vi. Processen G_P kan ge upphov till frekvenssvaret som visas i figur 3.

(4 p)

Solution

- i. **Falskt.** Ett nollställe ger en lutning $+1$ i Bode-diagrammets amplitudkurva och $+90^\circ$ i fas asymptotiskt. Detta förekommer inte i Bode-diagrammet i figur 2.



Figur 3: Frekvenssvar för uppgift 3. Här har man skickat in signalen $u(t)$ i processen och mäter signalen $y(t)$ som processens utsignal.

- ii. **Sant.** Amplitudmarginalen är 3.75 (läses av ur Bode-diagrammet vid fasskärfrekvensen $\omega_p \approx 1.22$). En förstärkning på 8 är därför alltför stor. (Det är lite svårt att läsa av, en avläsning av beloppet som 0.2 och därmed en fasmarginal på 5 kommer nog vara vanlig, och är helt okej!)
- iii. **Sant.** Nuvarande skärfrekvens är $\omega_c \approx 0.55$ rad/s. En högre skärfrekvens gör systemet snabbare.
- iv. **Falskt.** Nuvarande fasmarginal är 41 grader. Den fasretarderande länken designad på detta sätt sänker faseren med knappt 6 grader och därmed kan inte 40 graders fasmarginal garanteras. (Det är givetvis också möjligt att sätta in värden och räkna efter, men tillräckligt att veta att en fasretarderande länk sänker faseren samt att garantin att det är med som mest 6 grader gör att 40 grader ej kan garanteras).
- v. **Sant.** Processen har en lågfrekvensasymptot med lutning -1 och därmed en integrator. Det är känt att processer med integratorer vid återkoppling ej uppvisar stationära fel vid stegändringar i referensen. Vi kan också räkna efter, genom att notera att $G_P(s) = \frac{1}{s} \tilde{G}_P(s)$ där $\tilde{G}_P(0) \neq 0$. Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt eftersom vi har positiv amplitud- och fasmarginal. Därmed kan vi använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_P}{1 + G_P} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s} \tilde{G}_P(s)}{1 + \frac{1}{s} \tilde{G}_P(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tilde{G}_P(s)}{s + \tilde{G}_P(s)} = 1,$$

det vill säga noll stationärt fel.

- vi. **Falskt.** Insignalen är $u(t) = 1 \sin(0.1t)$ (läs av periodtiden till ≈ 63 , dvs 20π). I Bodediagrammet ser vi att $|G_P(i0.1)| = 6.6$, alltså ska insignalen förstärkas 6.6 gånger i utsignalen om processen är G_P . Utsignalen i frekvenssvaret har dock en amplitud på enbart 1.4. Därmed härrör den inte från G_P . (Fasförskjutningen stämmer dock och är på 99 grader.)

4. Betrakta systemet givet på tillståndsform enligt

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

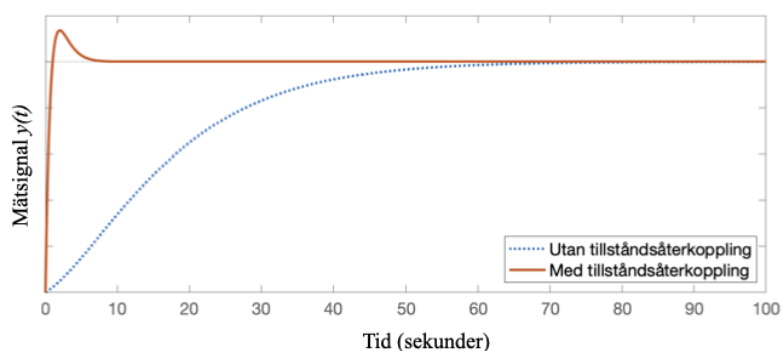
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- a. Ta fram systemets överföringsfunktion och bestäm dess poler. (1 p)
- b. Man anser att systemet är för långsamt som det är. Bestäm därför en tillståndsåterkoppling

$$u = l_r r - Lx,$$

som placerar båda poler i -1 , och där den stationära förstärkningen är samma som i det ursprungliga, icke-återkopplade, systemet. (2 p)

- c. I figur 4 visas stegsvaret för det ursprungliga och det återkopplade systemet (där rätt styrsignal u från b. har använts). Man är nöjd med snabbheten, men trots att polerna är på den reella axeln noteras en avsevärd översläng i stegsvaret. Förklara kort vad denna översläng beror på. (1 p)



Figur 4: Stegsvär för uppgift 4-c. Skalan på y-axeln är borttagen för att inte avslöja värdet på den stationära förstärkningen.

Solution

- a. Enklast är att notera att systemet är på styrbar kanonisk form (vilket underlättar polplaceringen väsentligt!). Se Formelsamlingen s. 4. Vi identifierar

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s^2 + 0.2s + 0.01}.$$

Alternativt, beräkna $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ och få samma svar.

Systemets poler ges av rötterna till polpolynomet, d.v.s.,

$$s_{1,2} = -\frac{0.2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.2}{2}\right)^2 - 0.01} = -0.1.$$

Alltså: dubbelpol i -0.1 .

- b. Med polerna i -1 ges det önskade polpolynomet av $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$. Med $L = [l_1 \ l_2]$ fås den återkopplade systemmatrisen som

$$A - BL = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 - l_1 & -0.01 - l_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket har polpolynomet $s^2 + (0.2 + l_1)s + (0.01 + l_2)$. Vi identifierar mot önskat polpolynom och får

$$L = [l_1 \ l_2] = [1.8 \ 0.99].$$

Notera: Om systemet är på styrbar kanonisk form fås tillståndsåterkopplingen alltid på detta enkla sätt, såsom differensen mellan koefficienter i polynomet!

Det återstår att beräkna l_r . För det ursprungliga systemet är den stationära förstärkningen $G(0) = \frac{0+0.5}{0^2+0.2\cdot 0+0.01} = 50$. Efter att ha satt in $u = -Lx + l_r r$ i dynamiken ges överföringsfunktionen från r till y av $G_{cl}(s) = \frac{s+0.5}{s^2+2s+1} l_r$ och $G_{cl}(0) = \frac{0.5}{1} l_r$. För att få samma statiska förstärkning behöver alltså $0.5 l_r = 50$, d.v.s.

$$l_r = 100.$$

- c. Överslängen beror på nollstället, som ligger i -0.5 . Då polerna låg i -0.1 var de närmare origo än nollstället, och det hade därför ingen inverkan på stegsvarets utseende. När polerna ligger i -1 så är dock nollstället närmare och får en stor inverkan.

5. Vi ska reglera vattennivån h i en cylindrisk tank i ett bevattningssystem.

Inflödet x i tanken bestäms av ventilen och utflödet v av pumpen, som slår på då och då när någon brukare använder vatten. Målet är att hålla nivån i tanken konstant. Vi antar att alla värden avser avvikelser från en referenspunkt, det vill säga, vi önskar hålla nivån $h = 0$.

Processen är avbildad i figur 5 och i blockschemat i figur 6.

Ventilen beskrivs av överföringsfunktionen

$$G_V(s) = \frac{1}{0.5s + 1}.$$

Eftersom volymförändringen i tanken $A \frac{dh}{dt} = [\text{inflöde} - \text{utflöde}] = x(t) - v(t)$, där A är tankens area, fås att vattennivån ges av

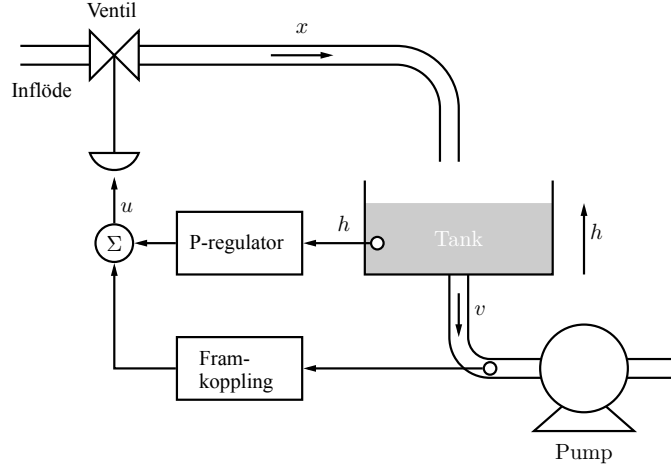
$$H(s) = \frac{1}{As} (X(s) - V(s)),$$

vilket i sin tur ger överföringsfunktionen $G_T(s)$ för tanken.

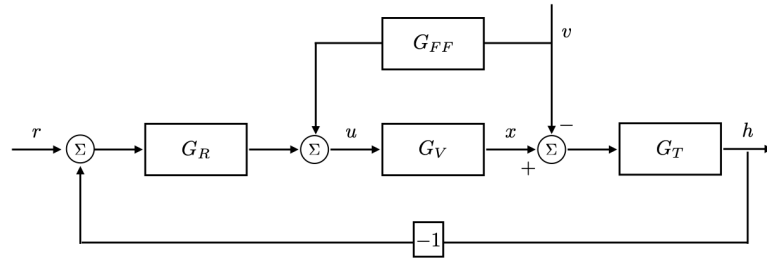
- a. Ta fram överföringsfunktionen från v till h då enbart framkoppling används.

Notera! Du förväntas sätta in uttrycken för G_V och G_T ! (0.5 p)

- b. Ett lämpligt val av framkoppling är $G_{FF} = 1$. Varför är detta lämpligare än det val som eliminerar överföringsfunktionen i a.? (0.5 p)



Figur 5: Nivåregleringsprocessen i uppgift 5



Figur 6: Blockdiagram för uppgift 5.

- c. Låt framkopplingen $G_{FF} = 1$, och låt fortsatt $G_R = 0$ (d.v.s bortse från P-regulatorn). Anta att någon plötsligt börjar använda vatten, så att $v(t)$ vid tiden $t = 0$ går från 0 till $0.1 \text{ [m}^3/\text{s]}$. Ta fram ett uttryck för nivån $h(t)$ för alla $t \geq 0$. Vad är $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$? (1.5 p)
- d. Lägg nu även till återkopplingen med P-regulatorn $G_R(s) = K$, och minns att $r = 0$. Vad blir nu det stationära felet i $h(t)$ vid samma stegändring av $v(t)$ som i uppgift c.? (1.5 p)

Solution

- a. Från blockdiagrammet utläses

$$\begin{aligned} H &= G_T(X - V) = G_T(G_V U - V) = G_T(G_V G_{FF} V - V) = \\ &= \frac{1}{As} \left(\frac{1}{1 + 0.5s} G_{FF} - 1 \right) V. \quad (1) \end{aligned}$$

Därmed är den sökta överföringsfunktionen

$$G_{v \rightarrow h}(s) = \frac{1}{As} \left(\frac{1}{1 + 0.5s} G_{FF}(s) - 1 \right)$$

- b. Det val som eliminerar överföringsfunktionen i a. vore $G_{FF} = 1 + 0.5s$, eftersom detta gör att $G_{v \rightarrow h} = 0$. Detta är ett olämpligt (omöjligt!) val eftersom det

innehåller en ren derivering – något som ej går att implementera. Vi kan också se det som att överföringsfunktionen inte är proper (täljarens gradtal överstiger nämnarens gradtal) och den är därmed inte kausal och implementerbar. Även om man skulle kunna implementera en ren derivata vore känsligheten mot mätbrus (som har liten amplitud men stor derivata!) ofördelaktig. Därför väljer man ofta att enbart behålla konstanta/statiska termer i framkopplingen, i detta fall termen 1. Se avsnitt 13.2 i kurskompendiet.

- c. Sätt in $V(s) = \frac{0.1}{s}$ och $G_{FF} = 1$ i (1):

$$H(s) = \frac{1}{As} \frac{-0.5s}{1 + 0.5s} \frac{0.1}{s} = -\frac{0.05}{As(1 + 0.5s)}$$

Använd formelsamlingen s. 6 nr. 15 för att inverstransformera:

$$h(t) = -\frac{0.05}{A}(1 - e^{-t/0.5}) = \boxed{\frac{0.05}{A}(e^{-2t} - 1)}.$$

Slutvärdet blir:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = -0.05/A.}$$

Det stationära felet är alltså nollskilt. Det går även att härleda med slutvärdessatsen pga att $sH(s)$ har alla poler i VHP.

- d. Notera att felet är $e(t) = r(t) - h(t) = 0 - h(t) = -h(t)$. Vi behöver därför överföringsfunktionen från v till h .

Ur blockdiagrammet fås:

$$\begin{aligned} H &= G_T(G_V U - V) \\ U &= G_{FF}V + G_R E = G_{FF}V - G_R H \end{aligned}$$

vilket tillsammans ger

$$H = G_T(G_V G_{FF}V - G_V G_R H - V),$$

och ommöblering och insättning ger

$$H = \frac{G_T(G_V G_{FF} - 1)}{1 + G_R G_T G_V} V = \frac{-0.5s}{As(0.5s + 1) + K} V.$$

Eftersom denna överföringsfunktion har alla poler i vänster halvplan för $K \geq 0$ kan vi använda slutvärdessatsen, med steget $V(s) = 0.1/s$ och beräkna stationära felet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0.5s}{As(0.5s + 1) + K} \frac{0.1}{s} = 0.$$

Tillsammans med framkopplingen eliminerar P-regulatorn alltså det stationära felet efter en störning. (Du kan verifiera att detsamma inte gäller om enbart P-regulatorn används!)

6. Denna uppgift handlar om kompensering i frekvensplanet.
Betrakta processen

$$G_P(s) = \frac{s+4}{s(s+1.5)(s+2)(s+3)}$$

vars Bode-diagram är avbildat i figur 8.

- a. Man har föreslagit tre olika regulatorer:

- P-regulatorn $G_K^P = 5$
- Den fasavancerande länken $G_K^{\text{lead}} = 2.2 \frac{1+\sqrt{2}s}{1+s/\sqrt{2}}$
- Den fasretarderande länken $G_K^{\text{lag}} = \frac{s+0.04}{s+0.04/10}$.

Bode-diagrammen i figur 9 visar två av de resulterande kretsöverföringsfunktionerna $G_0 = G_K G_P$. Para ihop dem med rätt regulator (en regulator blir över!). (1 p)

- b. De föreslagna regulatorerna ger trots allt inte önskad prestanda. Ta fram en kompenseringslänk G_K^b som gör systemet dubbelt så snabbt som G_P , med en fasmarginal på 50° . (2 p)

- c. Man vill att processen ska följa referenssignalen väl. Hur stort är det stationära felet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t),$$

vid en *ramp* i referenssignalen, om processen återkopplas med den föreslagna fasretarderande länken G_K^{lag} ? Hur ska länken modifieras för att ytterligare halvera felet? (2 p)

- d. Betrakta nu en generell process G_P med $n \geq 1$ integratorer. Visa att den fasretarderande länken

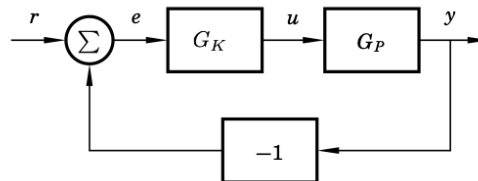
$$G_K = \frac{s+a}{s+a/M},$$

där $M > 1$ minskar det stationära felet med en faktor M (jämfört med enkel återkoppling, motsvarande $G_K = 1$), då referenssignalen är

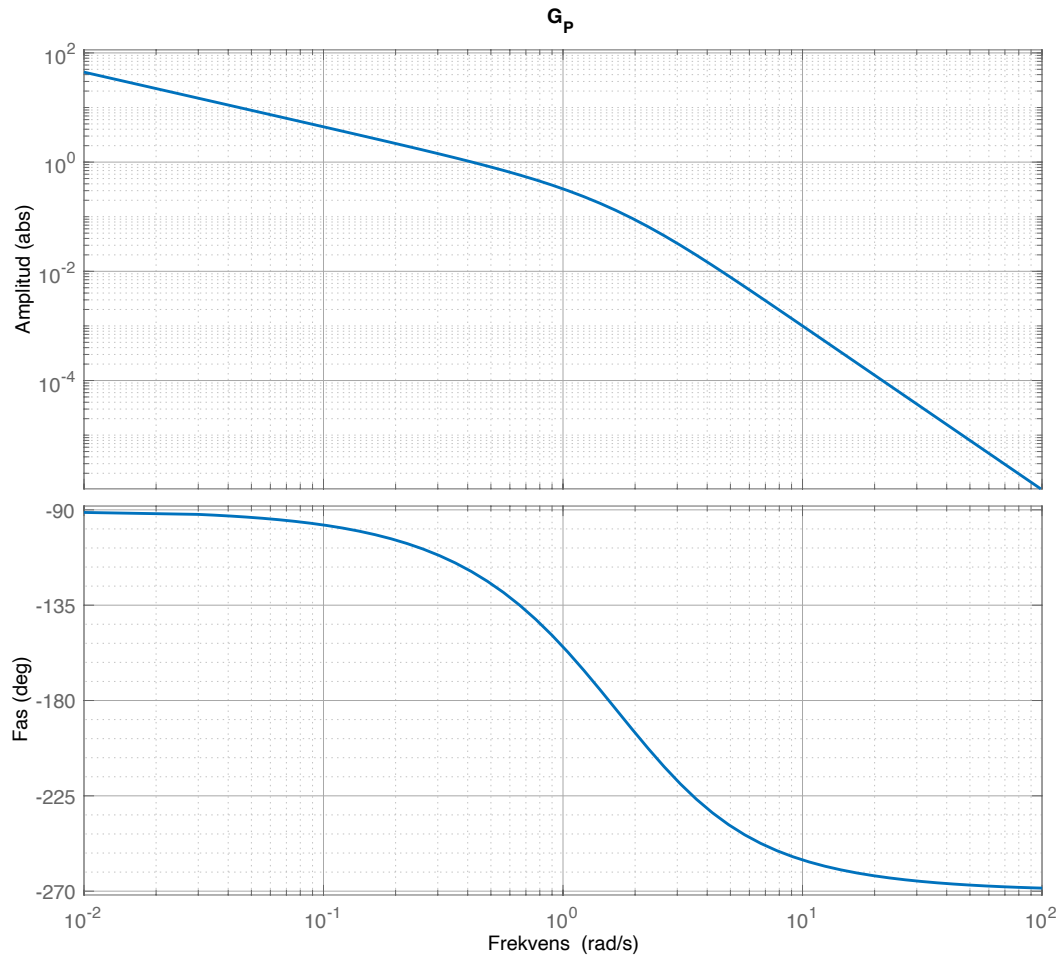
$$r(t) = \frac{1}{n!} t^n.$$

(1.5 p)

Ledning: en process $G(s)$ med n integratorer kan skrivas som $G(s) = \frac{1}{s^n} \tilde{G}(s)$ där $\tilde{G}(0) \neq 0$.



Figur 7: Återkoppling med kompenseringslänk för uppgift 6-c,-d.



Figur 8: Bodediagram för processen $G_P(s)$ i uppgift 6.

Solution

- a. Kretsöverföringsfunktion A fås med den fasretarderande länken G_K^{lag} . Detta därför att förstärkningen vid låga frekvenser ökat (vilket minskar stationära fel!); vi kan till exempel jämföra $|G_P(10^{-2}i)| \approx 40$ medan $|G_0^A(10^{-2}i)| \approx 200$. Skärfrekvensen är oförändrad vid $\omega_c \approx 0.4$ rad/s, men fasmarginalen har minskat något, båda enligt förväntan. Vidare är faskurvans utseende uppenbart starkt påverkad.

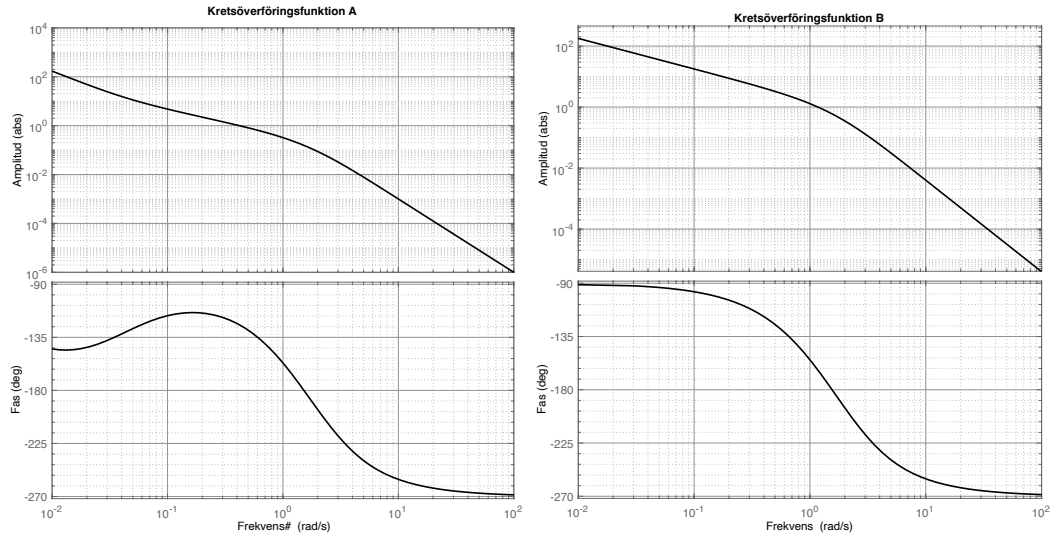
Kretsöverföringsfunktion B fås med P-regulatorn $G_K^P = 5$. Detta för att amplitudkurvan helt enkelt är "lyft": $|G_0^B(i\omega)| = 5|G_P(i\omega)|$, medan faskurvan är oförändrad.

Om du vill jämföra med hur Bode-diagrammet för $G_K^{\text{lead}} = 2.2 \frac{1+\sqrt{2}s}{1+s/\sqrt{2}}$ ser ut kan du helt enkelt knappa in funktionerna i Matlab!

- b. Utifrån kraven vet vi att vi ska designa en fasavancerande länk.

Nuvarande skärfrekvens är $\omega_c \approx 0.4$ rad/s, alltså önskar vi $\omega_c^d = 0.8$ rad/s för ett dubbelt så snabbt system.

Vi undersöker nuvarande fas vid $\omega_c^d = 0.8$: $\arg(G_P(i \cdot 0.8)) \approx 145^\circ$, dvs, fasmarginalen vore 35° om vi bara flyttade skärfrekvensen. Vi behöver öka fasen vid denna frekvens med $\Delta\varphi_m = 50^\circ - 35^\circ = 15^\circ$.



Figur 9: Bodediagram för kretsöverföringsfunktionen $G_0 = G_K G_P$ i uppgift 6-a. Para ihop med rätt kompenseringslänk.

Vidare läser vi av beloppet vid den önskade skärfrekvensen, vilket avslöjar hur mycket vi behöver lyfta amplitud kurvan. $|G_P(0.8i)| \approx 0.4$.

Nu använder vi oss av Formelsamlingen, sidan 15.

$$\Delta\varphi_m = 15^\circ \implies N \approx 1.7.$$

$$b = \frac{\omega_{c,d}}{\sqrt{N}} = \frac{0.8}{\sqrt{1.7}} \approx 0.61.$$

Slutligen, välj K_K för att verkligen flytta skärfrekvensen till $\omega_c^d = 0.8$ rad/s. Det vill säga: $|G_P(i\omega_c^d)G_K(i\omega_c^d)| = 1$. Här: $0.4K_K\sqrt{N} = 1$ och vi får

$$K_K = \frac{1}{0.4\sqrt{N}} \approx 1.92.$$

Sammantaget:

$$G_K^b(s) = K_K \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)} = 1.92 \frac{1 + s/0.61}{1 + s/1.04}.$$

c. Överföringsfunktionen mellan referenssignal r och reglerfel e är

$$G_{r \rightarrow e}(s) = S(s) = \frac{1}{1 + G_K^{\text{lag}} G_P} = \frac{1}{1 + \frac{s+0.04}{s+0.04/10} \frac{s+4}{s(s+1.5)(s+2)(s+3)}}.$$

Det gäller därför då referenssignalen är en ramp att $E(s) = S(s) \frac{1}{s^2}$. Vi använder slutvärdessatsen, då det slutna systemet är asymptotiskt stabilt (processen har inga poler i HHP, och positiv amplitud- och fasmarginal!):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{s+0.04}{s+0.04/10} \frac{s+4}{s(s+1.5)(s+2)(s+3)}} \frac{1}{s^2} = \\ &= \frac{1}{\frac{0.04}{0.04/10} \frac{4}{1.5 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{9}{4 \cdot 10} = \frac{9}{40}. \end{aligned}$$

Vi identifierar M i den generella formeln för en fasretarderande länk $G_K = \frac{s+a}{s+a/M}$ med 10. Det är uppenbart från räkningen ovan att om M dubblas, så att

$$G_K^{\text{lag, ny}} = \frac{0.04}{0.04/20},$$

så halveras felet till $\frac{9}{4 \cdot 20} = \frac{9}{80}$.

- d. Generellt gäller för reglerkretsen i figur 7 att överföringsfunktionen från referens till reglerfel $G_{r \rightarrow e}(s) = S(s) = \frac{1}{1+G_K G_P}$, där vi ska sätta $G_K = \frac{s+a}{s+a/M}$.

Laplacetransformen av referenssignalen ges av $\frac{1}{s^{n+1}}$, se formelsamling. Vidare antar vi, med hjälp av ledningen, $G_P(s) = \frac{1}{s^n} \tilde{G}_P(s)$.

Nu använder vi slutvärdessatsen (vi förutsätter att gränsvärdet existerar):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s^n} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{s+a}{s+a/M} \frac{1}{s^n} \tilde{G}_P(s)} \frac{1}{s^n} \\ &= \frac{1}{\frac{a}{a/M} \tilde{G}_P(0)} = \frac{1}{\tilde{G}_P(0)M}. \end{aligned}$$

Om enkel återkoppling används fås på samma sätt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS'(s) \frac{1}{s^n} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{1}{s^n} \tilde{G}_P(s)} \frac{1}{s^n} = \frac{1}{\tilde{G}_P(0)}.$$

Det gäller att $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) / \lim_{t \rightarrow \infty} e'(t) = \frac{1}{M}$. Den fasretarderande länken minskar alltså felet med en faktor M , vilket skulle visas.