

Reglerteknik AK

Tentamen 17 mars 2022 kl 14-19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsnivåer:

Betyg 3: lägst 12 poäng

4: lägst 17 poäng

5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke örprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

LYCKA TILL!

1. Ett system beskrivs av följande differentialekvation

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

- a. Ta fram systemets överföringsfunktion. (1 p)

- b. Är systemet stabilt? Motivera ditt svar. (0.5 p)

- c. Skriv systemet på tillståndsform enligt

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

(1 p)

- d. Låt

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Skissa stegsvaret $y(t)$. Vilken är periodtiden för de oscillationer som uppstår? (1 p)

Solution

- a. Vi börjar med att laplacetransformera differentialekvationen och får då:

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = U(s)$$

Därefter löser vi ut $Y(s)$ och får överföringsfunktionen:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

- b. Polerna till systemet ligger i $\pm 2i$, dvs på den imaginära axeln. Därmed är systemet (marginellt) stabilt. (Men ej asymptotiskt stabilt).
- c. Tillståndsformen kan tas fram på flera olika sätt. Ett sätt är att använda s.4 i formelsamlingen och $G(s)$ från tidigare. Konstanterna som används i formelsamlingen kan för denna överföringsfunktion identifieras till $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Stoppas man in dessa värden i den styrbara kanoniska formen fås:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Använder man istället den observerbara kanoniska formen fås:

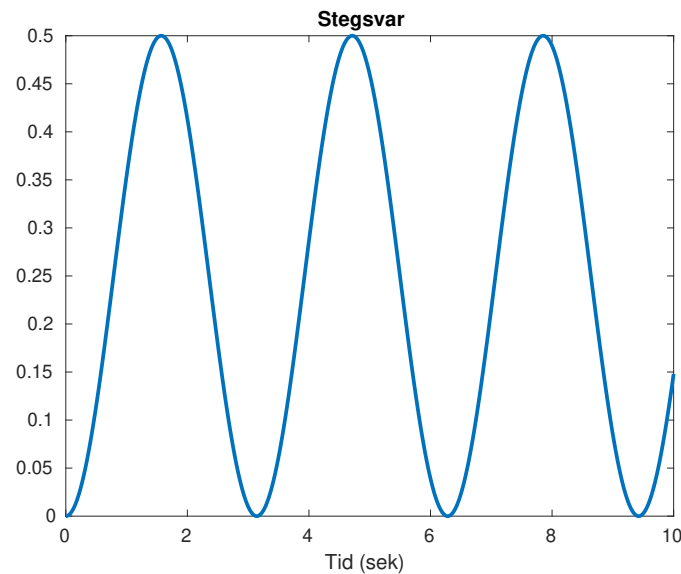
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Man kan också använda differentialekvationen direkt. Inför tillstånden $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Då ges tillståndsformen av:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -4x_1 + u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vilket är den observerbara kanoniska formen. Skulle man istället valt $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = y$ skulle analoga räkningar gett den styrbara kanoniska formen.



Figur 1 Stegsvär för uppgift 1 d

- d. Nedan följer hur man kan resonera sig fram till stegsvarets utseende, för att kunna skissa det.

$G(s)$ är ett andra ordningens överföringsfunktion med komplexa poler. Den vanliga formen att skriva en sådan funktion är:

$$G(s) = k \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

Man kan från detta identifiera att $\omega = 2$, $k = 1/4$ och $\zeta = 0$.

Skickar man in ett steg till detta marginellt stabila system kommer det från vila få en översläng som är lika stor som steghöjden för att sen få en undersläng tillbaka till noll. Då $k = 1/4$ kommer det bli en sinus/cosinusformad våg med medelvärde $1/4$ och amplitud $1/4$, dvs. $y(t)$ kommer pendla mellan 0 och $1/2$. Vinkelfrekvensen detta kommer att ske ges av $\omega = 2\text{rad/s}$, och **periodtiden kommer därmed ges av $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ sekunder**. Samma slutsats kan också fås genom att ta fram $y(t)$ från den inversa Laplacetransformen. $u(t)$ är ett steg ger $U(s) = 1/s$. $Y(s)$ fås då som:

$$Y(s) = G(s)U(s) = k \frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

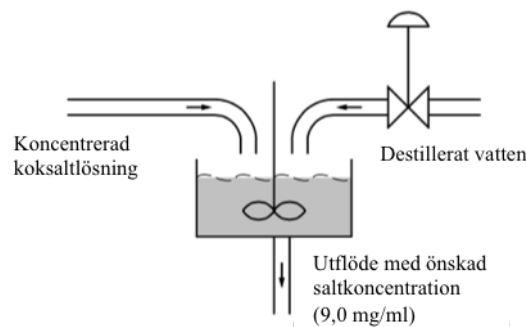
Transform nr 28 på sida 8 i formelsamlingen ger då

$$y(t) = k(1 - \cos \omega t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

Här används $\zeta = 0$ och att Laplacetransformen är linjär, dvs att man kan multiplicera med en konstant. Samma slutsatser om amplitud och periodtid kan nu dras från $y(t)$.

Det viktiga i skissen (för tentan) är att man förmedlar att det är svängningar som inte dör ut samt att medelvärdet ligger ovanför 0.

2. En enkel kemisk process går ut på att tillsätta vatten till en högkoncentrerad koksaltlösning för att producera en fysiologisk saltlösning som ska användas i sjukvården. Eftersom koncentrationen i den ursprungliga koksaltlösningen varierar vill man reglera processen för att åstadkomma den rätta saltkoncentration i slutprodukten. Processen är avbildad i Figur 2.



Figur 2 Process för uppgift 2

- a. Betrakta processen som ett reglertekniskt problem. Bestäm processens

- i. styrsignal (insignal) u
- ii. mätsignal (utsignal) y
- iii. störsignal d
- iv. referenssignal r .

Motivera ditt svar! (1 p)

- b. Man debatterar huruvida man ska reglera processen med hjälp av framkoppling från störsignalen eller återkoppling från mätsignalen. Förklara kort i ord vad de två alternativen innebär för denna process. (1 p)

Solution

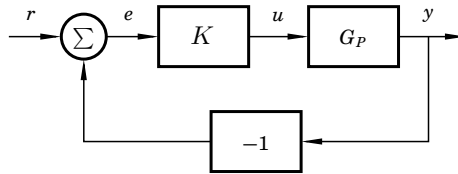
- a.
- i. styrsignal (insignal) u för systemet är flödet med destillerat vatten, då det är det vi kan styra med kranen. Insignalen skulle också kunna vara kranens läge, som ger ett visst vattenflöde.
 - ii. mätsignal (utsignal) y för systemet är saltkoncentrationen av den utflödande lösningen. Det är denna vi vill reglera.

- iii. störsignal d är variationen av saltkoncentrationen i den koncentrerade koksaltlösningen. Beroende på synsätt kan man antingen se avvikelsen i koncentrationen från sitt medelvärde som störsignal, eller koncentrationen i absoluta tal.
 - iv. referenssignal r är den önskade koncentrationen i koksaltlösningen. Det är detta värde vi försöker få utsignalen att sträva efter med vår styrsignal.
- b. Vid framkoppling behöver man mäta koncentrationen av den koncentrerade saltlösningen samt ha en modell för hur störningen påverkar utsignalen (koncentrationen i utflödet). Om modellen är exakt kommer regulatören kunna reglera flödet med destillerat vatten innan koncentrationen i utflödet hunnit ändras, vid en störning. Skulle modellen inte vara exakt riskerar man att få ett stationärt fel.

Vid återkoppling behöver man mäta koncentrationen i utflödet och använda den kunskapen för att styra ventilen med destillerat vatten. För att regulatören ska ändra flödet destillerat vatten måste det först bli ett fel. Om det finns en integrator i regulatören kan man garantera att det inte blir några stationära fel.

3. En process G_P återkopplas med en P-regulator enligt figur 3.

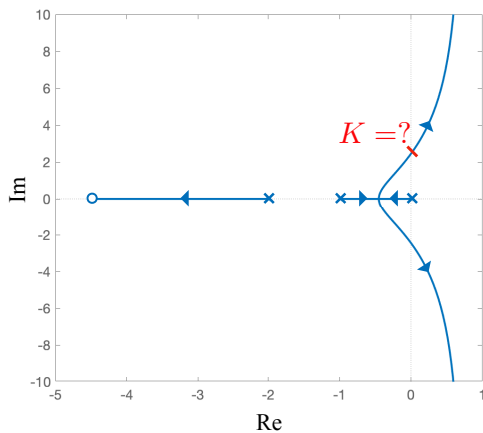
För att ta reda på hur det slutna systemets poler påverkas av valet av P-regulator har man ritat en rotort som visas i figur 4 (a). Nyquistkurvan för processen G_P visas i figur 4 (b).



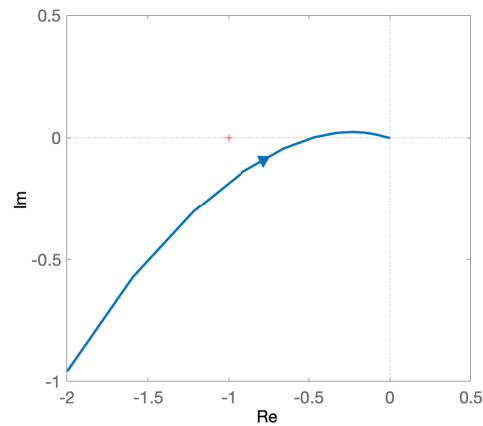
Figur 3 Reglerkrets för uppgift 3.

Besvara följande frågor, motivera dina svar:

- Hur många poler och nollställen har processen G_P ? (0.5 p)
- Är det slutna systemet asymptotiskt stabilt då $K = 1$? (0.5 p)
- Vilket K -värde motsvarar den markerade punkten på rotorten? Det vill säga, den punkt där rotorten skär den imaginära axeln. (1 p)



(a) Rotort för uppgift 3



(b) Nyquistkurva för uppgift 3

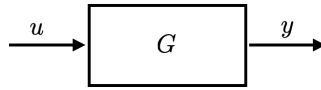
Figur 4 Rotort och nyquistkurva för uppgift 3

Solution

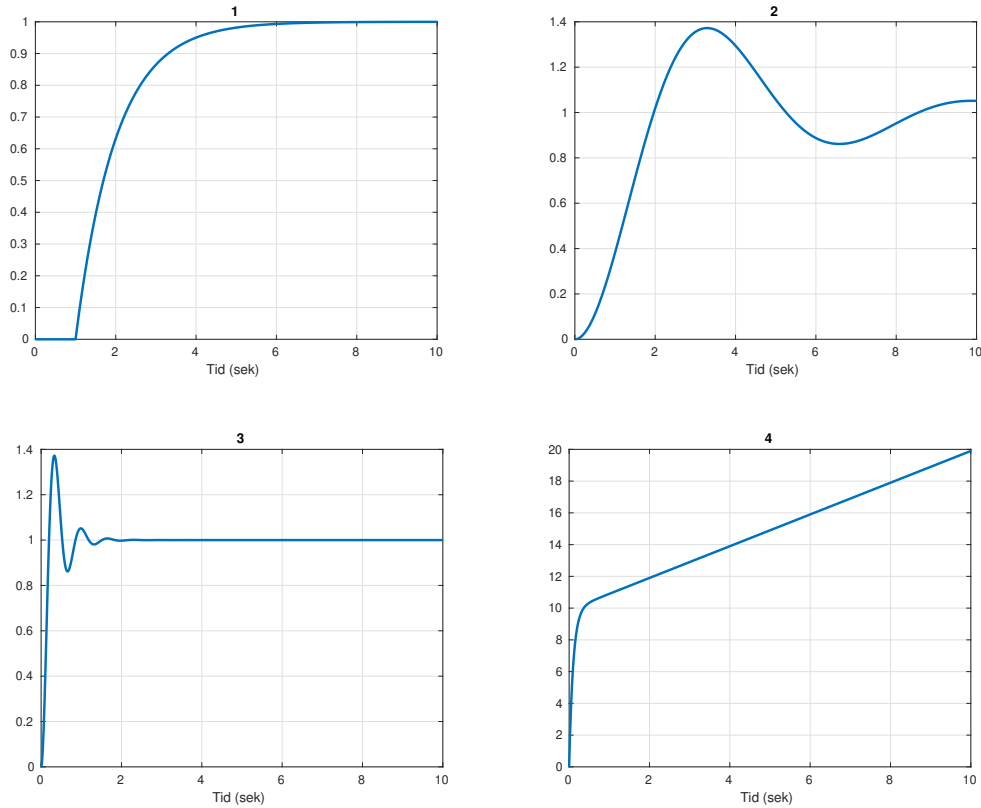
- Poler och nollställen för det slutna systemet visas i rotorten. Eftersom regulatorn inte har några poler eller nollställen måste samtliga poler och nollställen i det slutna systemet komma från processen. Därmed har G_P 3 poler ('X') och 1 nollställe ('O').
- Då $K = 1$ blir $G_0 = G_P G_r = G_P$. Därmed är Nyquistkurvan kurvan för det öppna systemet identisk med den i figur 4 (b). Då det inte finns några poler i höger halvplan i G_0 kan det förenklade nyquistkriteriet användas. Eftersom Nyquistkurvan hela tiden är till höger om punkten -1 är det återkopplade systemet asymptotiskt stabilt med $K = 1$.

- c. Polerna till det slutna systemet korsar imaginära axeln för det K som gör det återkopplade systemet går från stabilt till instabilt. Detta K är samma som ger att Nyquistkurvan går genom punkten -1. I Nyquistdiagrammet kan man avläsa att G_p skär negativa reella axeln i -0.5. Därmed ges det K som får $G_0 = G_p G_r$ att skära negativa reella axeln i -1 av $K = 2$.

4. I figur 6–7 finns fem Bodediagram (motsvarande fem processer G) och fyra stegsvar. Para ihop Bodediagram och stegsvar. Motivera dina svar noga. (2 p)



Figur 5 Blockdiagram för uppgift 4



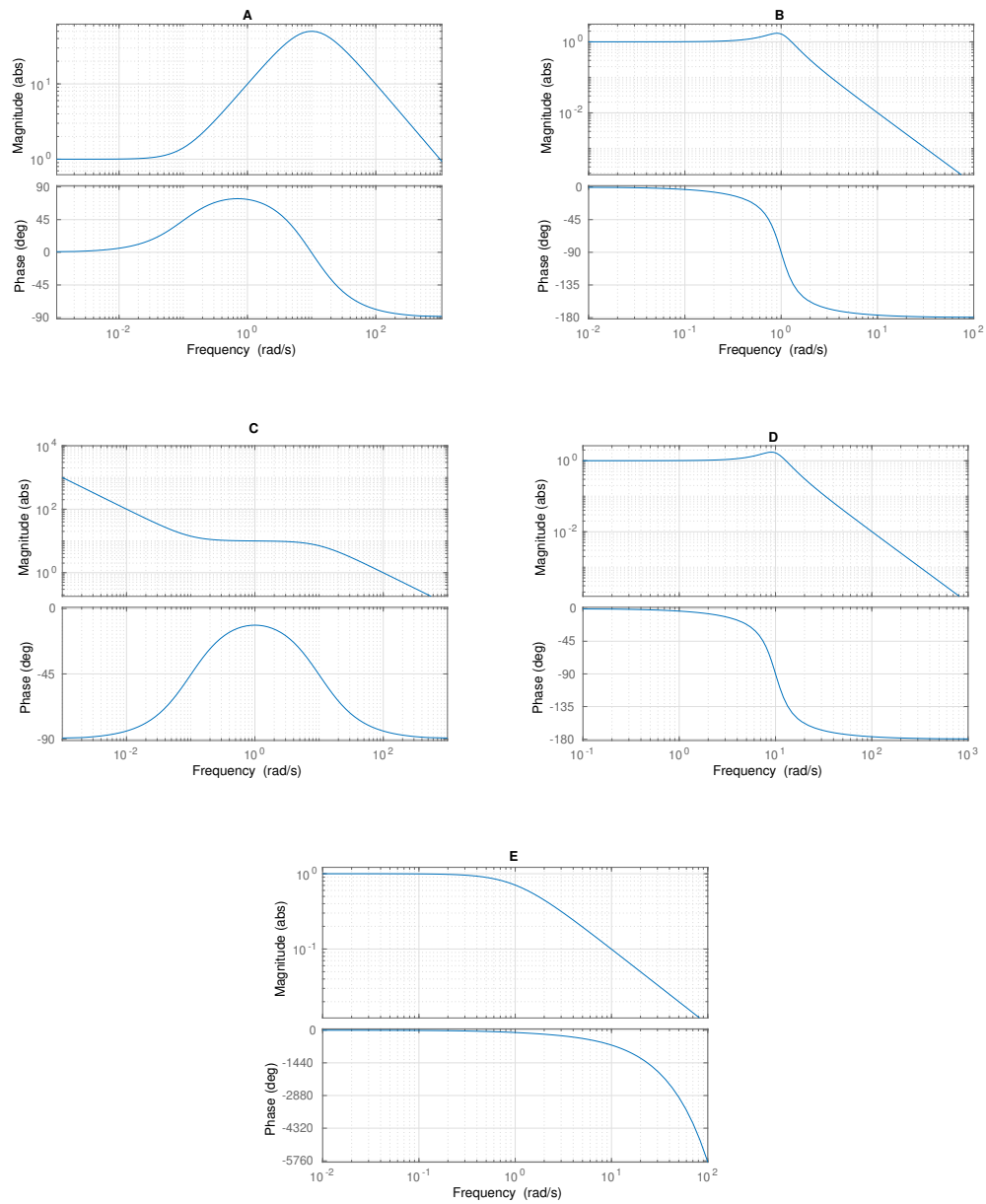
Figur 6 Stegsvär till uppgift 4

Solution

Stegsvar nr. 1 har en tidsfördröjning/dödtid. Från faskurvan kan man se att Bodediagram E har tidsfördröjning.

Stegsvar nr 2 och 3 liknar varandra och ser båda ut att vara andra ordningens system med komplexa poler. Bodediagram B och D visar Bodediagram för system med en resonanstopp, dvs. att det finns komplexa poler. Brytfrekvensen för D ligger en faktor 10 snabbare än den för B. Därmed måste B höra ihop med det långsammare stegsvaret 2 och D höra ihop med stegsvar nr 3.

Stegsvar nr 4 tyder på att det finns en integrator, då den konstanta insignalen verkar få oändlig förstärkning. Bodediagram C har en integrator, vilket märks på lågfrekvensasymptotens lutning. Därmed är Bodediagram A över.



Figur 7 Bodediagram till uppgift 4

Sammanfattningsvis:

- 1 $\leftrightarrow$ E
- 2 $\leftrightarrow$ B
- 3 $\leftrightarrow$ D
- 4 $\leftrightarrow$ C

5. Betrakta systemet givet på tillståndsform enligt

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Antag att styrsignalen ges av tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + r(t),$$

där $L = [l_1 \ l_2]$.

- a. För vilka värden på l_1 , l_2 är det slutna systemet asymptotiskt stabilt? (1.5 p)
- b. Välj den av följande polplaceringar som du anser skulle ge bäst prestanda hos det slutna systemet (bäst stegsvar). Motivera ditt svar.

- i. $s_1 = -0.5, \ s_2 = -6$,
- ii. $s_{1,2} = -2 \pm 2i$,
- iii. $s_{1,2} = -4 \pm 18i$,
- iv. $s_{1,2} = -2$.

Bestäm en styrlag $u(t)$ så att det slutna systemets poler placeras enligt ditt val. (2.5 p)

- c. Det visar sig att tillståndet x_2 inte är mätbart. Vi väljer därför att skatta tillståndsvektorn med ett Kalmanfilter enligt

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu + K(y - C\hat{x}),$$

där $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$.

Är det möjligt att genom lämpligt val av k_1 , k_2 placera Kalmanfiltrets poler (det vill säga, egenvärdena hos matrisen $(A - KC)$), var som helst i vänster halvplan? Motivera ditt svar. (1 p)

Solution

- a. The closed-loop system is given by

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BL)x + Br, \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

Substitution yields

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 - l_1 & -2 - l_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r,$$

the characteristic polynomial of the state matrix is

$$p(s) = \det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -2 + l_1 & s + 2 + l_2 \end{vmatrix} = s^2 + (2 + l_2)s + l_1 - 2.$$

Asymptotic stability requires that the eigenvalues of the system strictly lie in the left half plane. The characteristic polynomial is that of a second order system and hence for stability we require that all coefficients of the polynomials be positive

$$\begin{aligned} 2 + l_2 &> 0, \\ l_1 - 2 &> 0, \end{aligned}$$

which leads to

$$\begin{aligned} l_2 &> -2 \\ l_1 &> 2. \end{aligned}$$

- b.**
- (i) This is a combination of two first order systems. However, the slow pole in -0.5 will dominate the process, yielding a slow step response (especially compared to the other pole placements).
 - (ii) This is the case where $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$. This choice is better than (i) since the system is faster, however, there will be some oscillations/overshoot. Generally, a pole placement with this choice of relative damping gives a good trade-off between speed, overshoot and small input signal.
 - (iii) In this case $\zeta = 0.22$. This choice gives a faster response than in (ii) since the poles are further from the origin, but higher overshoot and more oscillations. The phase margin is smaller than (ii).
 - (iv) In this case $\zeta = 1$. This system has no overshoot, but is slower than the cases (ii) and (iii). However, it is still faster than (i)

Among the available choices if you want a faster system where you don't tolerate any overshoot then the choice is (iv). If, on the other hand, you want an extremely fast response and you do not care about the overshoot then the choice is (iii). If lastly you want a good trade-off between overshoot and speed then you should choose (ii). Figure 8 displays step response for the different selection of closed loop poles

Placing the poles at $-4 \pm 18i$ (choice (iii)) using state feedback: write the characteristic polynomial needed to get the poles as desired which is found to be

$$s^2 + 8s + 340. \quad \text{Equate that to} \quad s^2 + (2 + l_2)s + l_1 - 2$$

Solve to get $l_1 = 330$, $l_2 = 2$. Hence the input is: $u(t) = -330x_1(t) - 2x_2(t)$.

In a similar manner for choice (ii) we get the input

$$u(t) = -10x_1(t) - 2x_2(t)$$

Lastly for the case (iv) we get the input

$$u(t) = -6x_1(t) - 2x_2(t)$$

For the case (i), we get $L = [5 \ 4.5]$.

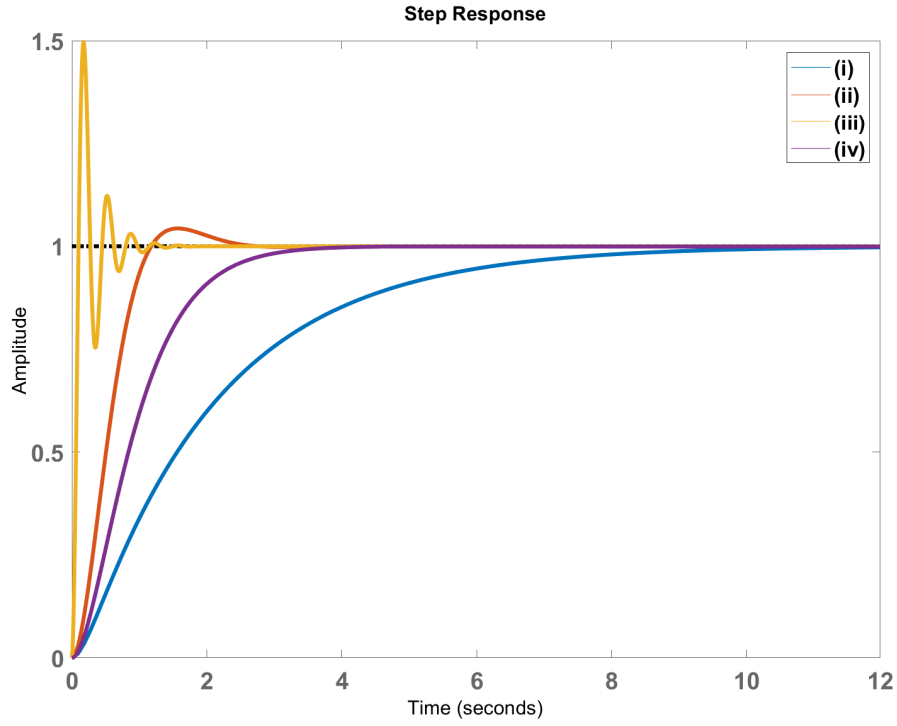


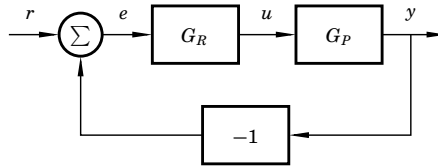
Figure 8 The step response for all cases in 4.b.

c. Calculate the observability matrix

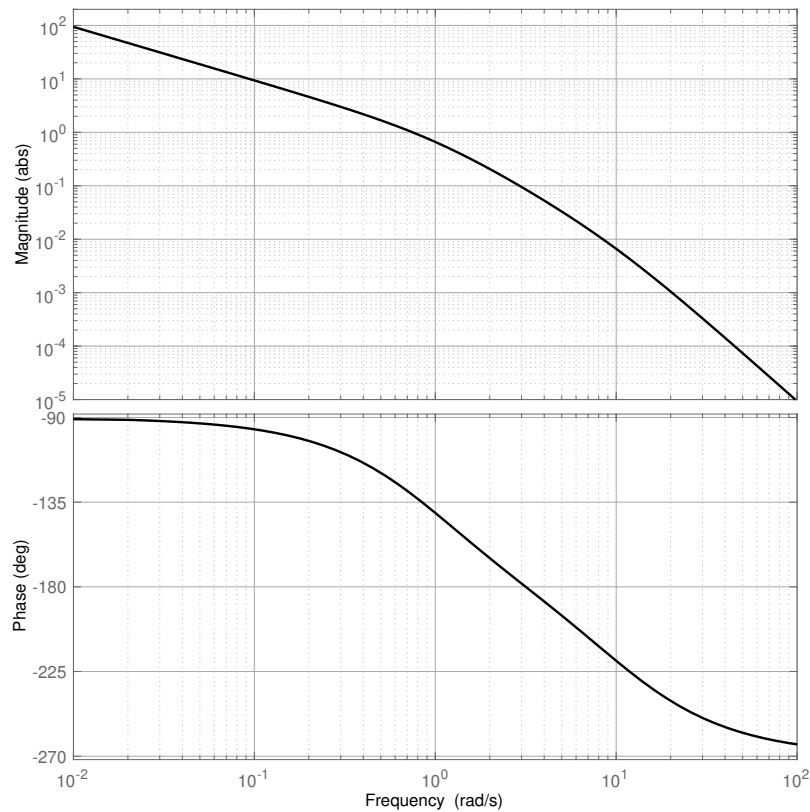
$$W_o = \begin{pmatrix} C & CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Since $\det(W_o) = 1 \neq 0$ the system is observable, hence we can place the poles of the Kalman filter wherever we want. In other words, there exists $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ such that the eigenvalues of $A - KC$ could be placed wherever we want.

6. Betrakta processen G_P vars Bodediagram visas i figur 10. Processen återkopplas enligt figur 9 med regulatoren G_R .



Figur 9 Reglerkrets för problem 6



Figur 10 Bodediagram för uppgift 6

- a. Vi utvärderar först en enkel P-regulator: $U(s) = 5(R(s) - Y(s))$, det vill säga, $G_{R,a}(s) = 5$. Systemets stegsvar visas i figur 11.

Detta stegsvar anses vara tillräckligt snabbt, men alltför oscillativt. Det antas bero på en alltför liten fasmarginal hos det öppna systemet.

Hur stor är den kvarvarande fasmarginalen med detta val av regulator? (1 p)

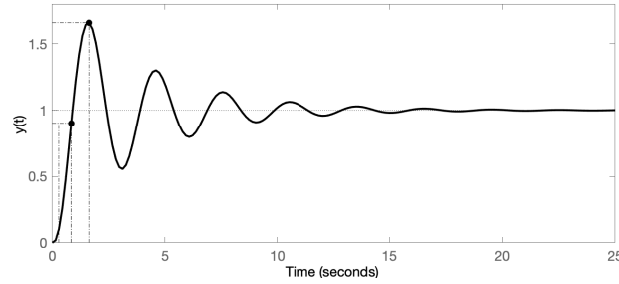


Figure 11 Stegsvär för deluppgift 6 a.

- b. Det föreslås att istället använda regulatorn

$$G_{R,b}(s) = 5 \frac{s + 0.2}{s + 0.02}.$$

Hur påverkas fasmarginalen med detta val av regulator?

(1 p)

- c. Bestäm nu en regulator på formen

$$G_{R,c}(s) = K_K \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}$$

som uppfyller specifikationen:

- det slutna systemets stegsvär är lika snabbt som stegsväret i deluppgift a,
- fasmarginen är dubbelt så stor som i deluppgift a.

Om du inte har något svar på deluppgift a, ta fram en regulator som ger en fasmarginal på 40° och är 50% snabbare än med enkel återkoppling ($G_R(s) = 1$).

(2 p)

- d. Man upptäcker nu att det finns dödtid i systemet, men är osäker på hur lång den är. Vilken regulator tolererar längst dödtid: regulatorn $G_{R,c}(s)$ från deluppgift c, eller den enkla återkopplingen $G_R(s) = 1$?

(1 p)

Solution

- a. Multiplying the transfer function by 5 does not change the phase but shifts the magnitude plot upward by 5. This changes the original cross over frequency by shifting it to the right. The new crossover frequency becomes where the gain of the process is 0.2, which is $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$. Projecting the new cross over frequency on the phase plot gives $\varphi_m = 14.7^\circ$. Figure 12 illustrates bode plot of the loop transfer function with the controller $G_{R,a} = 5$, indicating both phase and gain margins.

- b. The regulator

$$G_{R,b}(s) = 5 \frac{s + 0.2}{s + 0.02}$$

is of the form

$$G_K(s) = K \frac{s + a}{s + a/M}$$

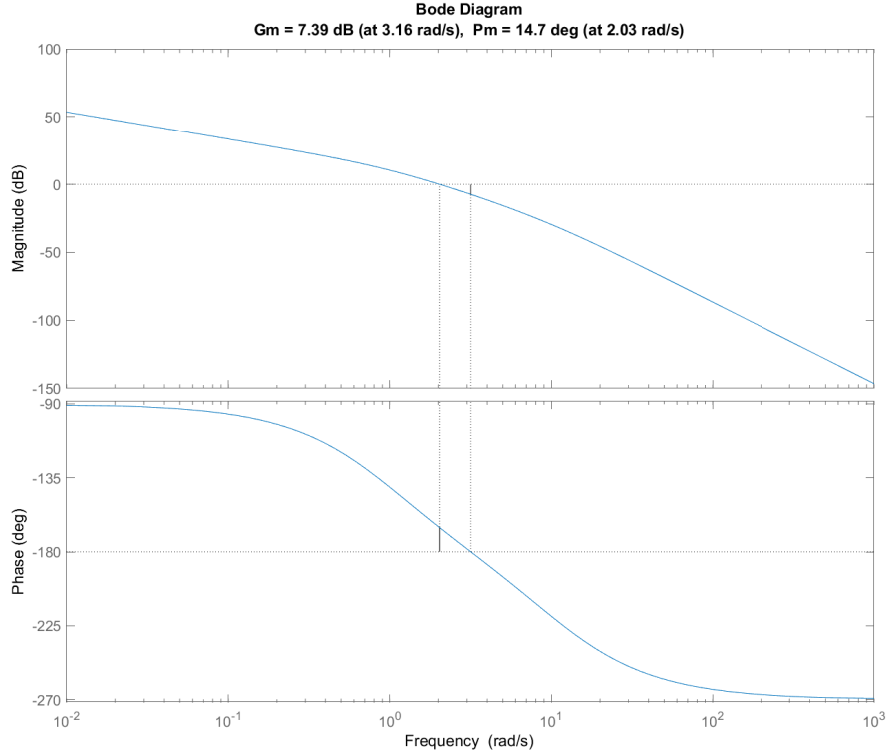


Figure 12 bode plot of $G_{R,a}(s)G_P(s) = 5G_P(s)$.

with $a = 0.2$, $M = 10$, which corresponds to the lag compensation (fasretarde-rande l nk) multiplied with the P controller from a. Hence, it contributes with a phase lag, meaning that such a regulator leads to a decrease in the phase margin.

Note also that $\alpha = 0.2$ for the lag compensator. This choice corresponds to $\alpha = 0.1\omega_c$. It is known that with such selection we get approximately a decrease of 6° (the formulae collection says maximum 6°) in the phase margin. This explains roughly the drop from 14.7° to 9.57° in the phase margin displayed in the new Bode plot in Figure 13.

Of course, the exact phase shift of the controller may also be calculated by hand.

- c. The new phase margin should be around $\phi_m = 30^\circ$ (double the one in a.) and the cross over frequency remain the same, i.e., $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$. The phase lead should contribute with an increase of at least around $\Delta\phi_m = 15^\circ$ at the same ω_c . Use the plot displaying the relationship between the parameter N and the phase lead to get $N = 1.7$ to get the desired phase increase.

We need this phase lead to happen at the crossover frequency

$$\omega_c = b\sqrt{N} = 2 \text{ rad/s},$$

which gives $b = 1.53$. Next, we determine K_K so that ω_c really becomes the cross over frequency, using the equation

$$1 = |G_p(i\omega_c)G_{R,c}(i\omega_c)| = 0.2K_K\sqrt{N}.$$

This gives $K_K = 5/\sqrt{N} \approx 3.8$. Hence the designed regulator is given by

$$G_{R,c}(s) = 3.8 \frac{1 + 0.65s}{1 + 0.38s}$$

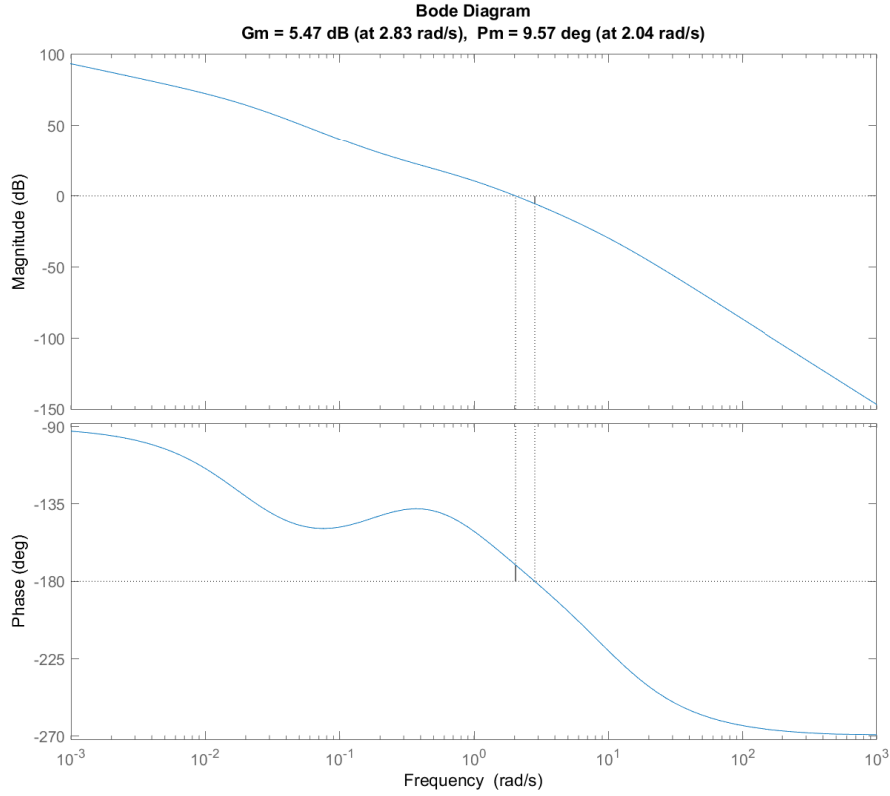


Figure 13 bode plot of $G_{R,b}(s)G_P(s)$.

Figure 14 displays both Bode plot and step response of the system when applying the regulator $G_{R,c}(s)$ to $G_{R,a}(s)G_P(s) = 5G_P(s)$ from 5.a.

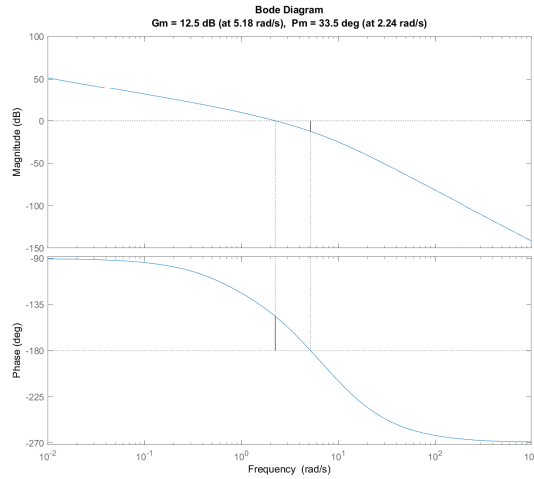
Here follows the solution if there was no answer from a.

If $G_R(s) = 1$, the cross over frequency is at $\omega_c \approx 0.8$ rad/s. The new cross over frequency should then be 50% faster, i.e. $\omega_c^{new} = 0.8 \cdot 1.5 = 1.2$ rad/s. At this frequency the phase margin is 35° , meaning that a 5° increase is needed. From the plot in the collection of formulae one can see that N needs to be about 1.25. We need this phase lead to happen at the crossover frequency $\omega_c^{new} = b\sqrt{N} = 1.2$ rad/s which gives $b = 1.07$. Next, we determine K_K so that ω_c^{new} really becomes the cross over frequency from the equation 1 = $|G_p(i\omega_c^{new})G_{R,c}(i\omega_c^{new})| = 0.5K_K\sqrt{N}$ which gives $K_K = 2/\sqrt{N} \approx 1.79$. Hence the designed regulator is given by

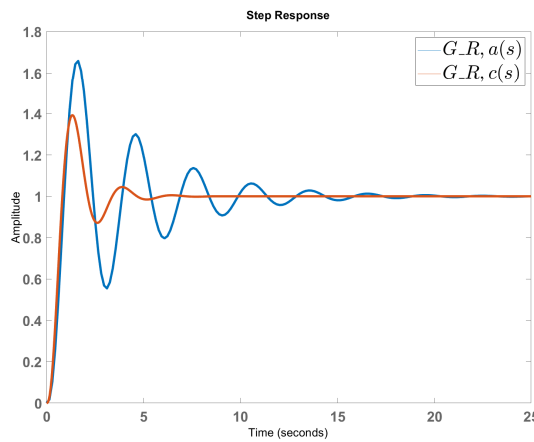
$$G_{R,c}(s) = 1.79 \frac{1 + 0.93s}{1 + 0.75s}$$

- d. First the phase margins need to be converted from degrees to radians. To know which system tolerates larger time delays, we calculate the bound $L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c}$ for both systems and compare. For the uncompensated system (with $G_R(s) = 1$) , $\phi_m \approx 50^\circ \approx 0.87$ rad at $\omega_c \approx 0.8$ rad/s. We get

$$L_m = \frac{0.87 \text{ rad}}{0.8 \text{ rad/s}} = 1.09 \text{ s.}$$



(a) Bode plot of $5G_{R,c}(s)G_P(s)$



(b) Step response when employing regulator from (a) and from (b) to $5G_P(s)$

Figur 14 Bode plot and step response for compensated system in 5.c

For the compensated system, $\phi_m \approx 30^\circ \approx 0.53\text{rad}$ at $\omega_c \approx 2 \text{ rad/s}$ and

$$L_m = \frac{0.53 \text{ rad}}{2 \text{ rad/s}} = 0.265 \text{ s.}$$

Hence the original system tolerates time delays better.

For the case that there was no answer in a., the phase margin is $\phi_m \approx 40^\circ \approx 0.70 \text{ rad}$ at $\omega_c \approx 1.2 \text{ rad/s}$. Then, $L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} = \frac{0.70 \text{ rad}}{1.2 \text{ rad/s}} = 0.58 \text{ s}$. Thus the original system still tolerates the time delay better.

7. Denna uppgift handlar om känsligheten hos en reglerkrets gentemot störningar och brus. Betrakta regulatorstrukturen given i blockdiagrammet i figur 15. Här är z den signal man vill reglera, men man mäter signalen y , som utsätts för mätbruset n . Störningen d påverkar också systemet.

- a. Ta fram de respektive överföringsfunktionerna från n till z och d till z , uttryckt i G_P , G_{R1} , G_{R2} . (1 p)

- b. Man uppskattar att känslighetsfunktionen, överföringsfunktionen från d till z , ges av

$$S(s) = \frac{s}{s + 0.2}.$$

Man är orolig för en relativt lågfrekvent störning d som modelleras som en sinusvåg: $d(t) = A \sin(0.2t)$, där amplituden A är okänd. Man vill att en sådan störning ska undertryckas med minst en faktor 5 (d.v.s. högst 20% av amplituden får finnas kvar i z efter lång tid).

Uppfyller systemet denna specifikation? (1 p)

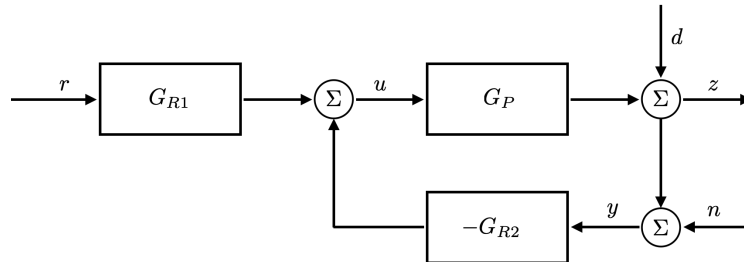
- c. För att bättre kunna utvärdera systemets störningskänslighet görs experiment och man får då fram Bodediagrammet i figur 16 för känslighetsfunktionen $S(s)$.

Vilka frekvenser ω på störningarna $d = A \sin(\omega t)$ uppfyller nu kravet att de undertrycks med minst en faktor 5? (0.5 p)

- d. Man är även orolig för påverkan från mätbruset n , som också modelleras som sinusvågor $n = A_n \sin(\omega t)$. För vilka frekvenser ω gäller att mätbruset undertrycks med c:a en faktor 10 eller mer? Motivera ditt svar noga. (2 p)

Ledning: Betrakta summan och/eller differensen av känslighetsfunktionen och överföringsfunktionen från n till z .

- e. För säkerhets skull vill man se till att störningar d med högre frekvenser, upp till $\omega = 10^2$, undertrycks. Det föreslås därför att ta fram en ny regulator som gör känslighetsfunktionen mindre för alla sådana frekvenser. Vad skulle det innebära för känsligheten mot mätbruset n ? Motivera ditt svar. (1 p)



Figur 15 Blockdiagram för uppgift 7

Solution

- a. Using block diagram calculations, the transfer function from n to z is found while $r = d = 0$:

$$Z(s) = -\frac{G_{R2}G_P}{1 + G_{R2}G_P}N(s) \quad \text{thus} \quad G_{zn} = -\frac{G_{R2}G_P}{1 + G_{R2}G_P}$$

The transfer function from d to z is found while $r = n = 0$:

$$Z(s) = \frac{1}{1 + G_{R2}G_P}D(s) \quad \text{thus} \quad G_{zd} = \frac{1}{1 + G_{R2}G_P}$$

Notice there is no dependence on G_{R1} .

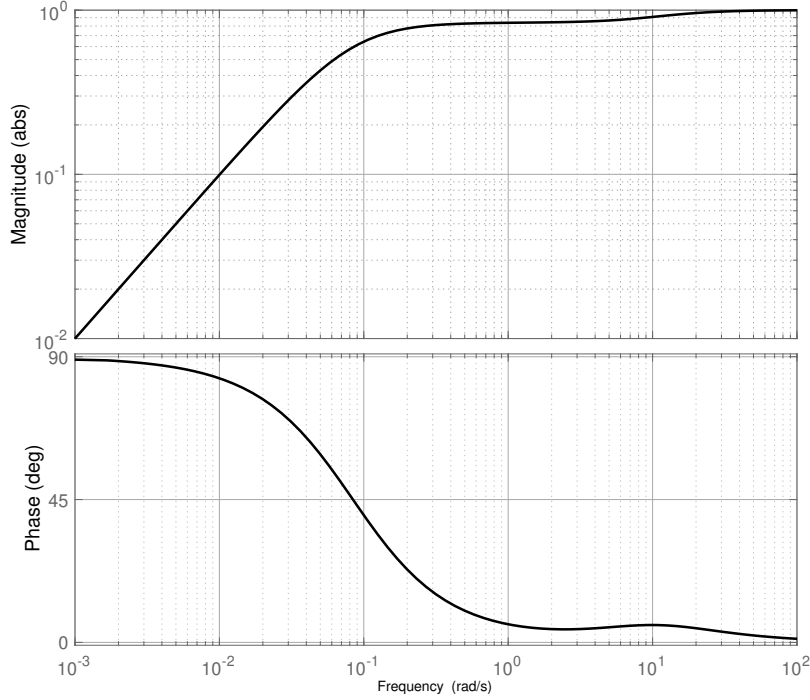


Figure 16 Bodediagram för känslighetsfunktionen för uppgift 7 c-e

- b. The response of a system governed by the transfer function $S(s)$ to a sine input $d(t) = A \sin \omega_0 t$ is given by

$$z(t) = A|S(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg\{S(i\omega_0)\}).$$

Here, we have an input with the frequency $\omega_0 = 0.2$, and therefore,

$$|S(i\omega_0)| = \left| \frac{0.2i}{0.2i + 0.2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$$

Thus the gain of the disturbance is 0.7

Obviously, the system does not meet the requirement, as the signal is only repressed by $\approx 30\%$. We would need 0.2 as the gain of the output $z(t)$.

- c. We need to find frequencies for which $|S(i\omega)| \leq 0.2$. From the Bode plot of $S(i\omega)$ we get that the frequencies $\omega \leq 0.02$ satisfy the criterion.
- d. First note that

$$\frac{Z(s)}{D(s)} - \frac{Z(s)}{N(s)} = S(s) - G_{nz}(s) = \frac{1}{1 + G_{R2}G_P} + \frac{G_{R2}G_P}{1 + G_{R2}G_P} = \frac{1 + G_{R2}G_P}{1 + G_{R2}G_P} = 1,$$

and hence

$$G_{nz}(s) = S(s) - 1.$$

Alternatively, add up the functions without the minus sign and notice that $S(s) + -G_{nz}(s) = 1$. In fact, $T(s) = \frac{G_{R2}G_P}{1 + G_{R2}G_P}$ is called the complimentary sensitivity function, for reasons that will soon be evident.

To guarantee an attenuation of the measurement noise by a factor of 10, find the frequencies for which $|G_{nz}(i\omega)| = |T(i\omega)| \leq 0.1$. We are given the magnitude plot of $S(i\omega)$. Using that, find the frequency for which $|S(i\omega)| = 0.9$ and call it $\bar{\omega}$. At this frequency it holds that $|T(i\bar{\omega})| = 0.1$. Since the magnitude plot of $S(i\omega)$ is strictly increasing, the requirement holds for $\omega \geq \bar{\omega}$. From the Bode plot we get $\bar{\omega} \approx 9$ rad/s.

This problem was supposed to be solved using the Bode plot of $S(s)$, depicting the actual frequency response. If one uses the sensitivity function from b., one gets:

$$T(s) = S(s) - 1 = \frac{-0.2}{s + 0.2}$$

to guarantee an attenuation of the measurement noises by factor of 10 find frequencies for which $|T(\omega)| \leq 0.1$ or equivalently $|T(\omega)|^2 \leq 0.01$. Hence we get

$$\frac{0.04}{0.04 + \omega^2} \leq 0.01 \Rightarrow 0.04 + \omega^2 \geq 4 \Rightarrow \omega \geq \sqrt{4 - 0.04} \approx 2.$$

- e. As is evident from the relation above, suppressing the disturbance d by decreasing $|S(i\omega)|$ for some frequency range inevitably implies that $|T(i\omega)|$ increases for those same frequencies. Therefore, if one proceeds as suggested in the exercise, the sensitivity towards measurement noise n up to a frequency of $\omega = 100$ rad/s will increase.