Reglerteknik AK – F3

- Impulssvar och stegsvar
- Koppling mellan överföringsfunktion och stegsvar

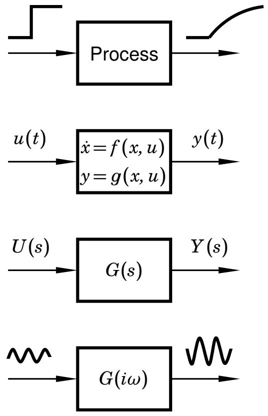
Processmodeller i kursen

Stegsvarsmodell (F3)

Tillståndsmodell (F2)

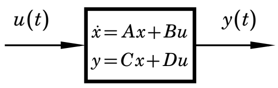
Överföringsfunktion (F2)

Frekvensfunktion (F4)



Linjära systemmodeller – F2

Tillståndsmodell

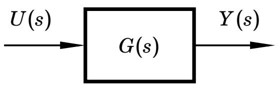


Kan visa att systemsvar ges av:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Överföringsfunktion

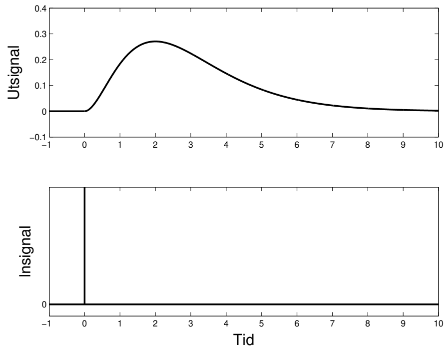


Systemsvar:

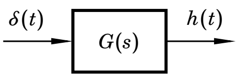
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Impulssvar

- Antag att systemet är i jämvikt
- Hur reagerar systemet på en impuls (Dirac funktion)?



Impulssvar för linjära system



1. Laplacetransformera insignal:
$$U(s) = \int_{t=0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$
2. Utsignalen blir:
$$H(s) = G(s)U(s) = G(s)$$
3. Invers transform ger impulssvar:
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

$h(t)$ kallas också viktfunktion

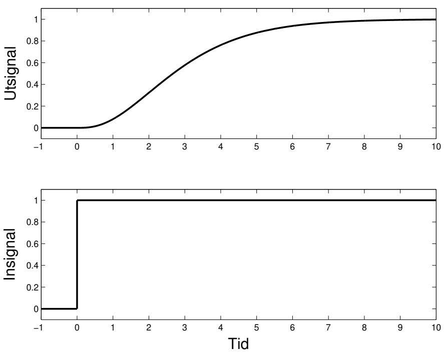
Impulssvar för linjära system

För system på tillståndsform blir impulssvaret:

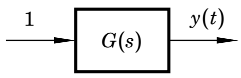
$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Stegsvar

- Antag att systemet är i jämvikt
- Hur reagerar systemet på ett steg i insignalen?



Stegsvar för linjära system



1. Laplacetransformera insignal:
$$U(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$
2. Utsignalen blir:
$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$$
3. Invers transform 12. i formelsamling ger stegsvar:
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\} = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

(Stegsvaret är integralen av impulssvaret)

Samband överföringsfunktion – stegsvar

- Laplace av stegsvar: $Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$
- Begynnelsevärdesteoremet (transform 15. i formelsamling):

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- Slutvärdesteoremet (transform 14. i formelsamling):

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

(gäller bara om gränsvärdet existerar)

Statisk förstärkning

- Stegsvarets slutvärde kallas **statisk förstärkning**
- Kan beräknas med hjälp av slutvärdesteoremet

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0)$$

- Notera: Stegsvarets slutvärde existerar bara för stabila system

Samband överföringsfunktion – stegsvar

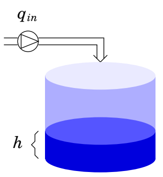
Systemtyp:

- Integrator
- Första ordningens system
- Andra ordningens system med reella poler
- Andra ordningens system med komplexa poler
- System med ett nollställe
- System med tidsfördröjningar

Integrerande system

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Exempel: Tank utan fritt utflöde:



- Tvärsnittsarea: A

Överföringsfunktion från q_{in} till h:

$$G(s) = \frac{1/A}{s}$$

Integrerande system

- Pol:

$$s = 0$$

- Stegsvar,
  - Laplace:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s^2}$$

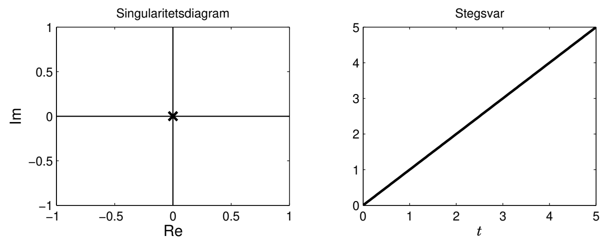
  - Invers Laplacetransform 3. i formelsamling:

$$y(t) = Kt$$

- Inget slutvärde då systemet ej är asymptotiskt stabilt

Integrerande system

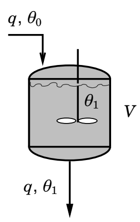
$K = 1$:



Första ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1+sT}, \quad T > 0$$

Exempel: Temperaturdynamik i tank:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_1:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\frac{V}{q}}$$

Första ordningens system

- Pol:

$$s = -1/T$$

- Stegsvar:
  - Laplace:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s(1+sT)}$$

  - Invers Laplacetransform 15. i formelsamling:

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

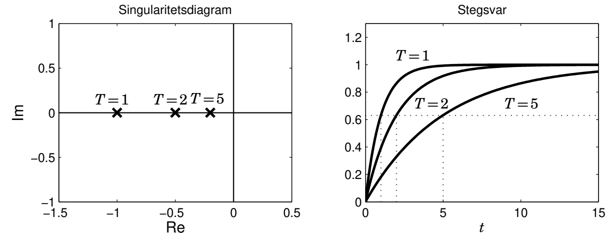
- T kallas **tidskonstant** för systemet

$$y(T) = (1 - e^{-1})K \approx 0.63K$$

(tid då ≈63% av statisk förstärkning $G(0) = K$ nås efter steg)

Första ordningens system

$K = 1$:

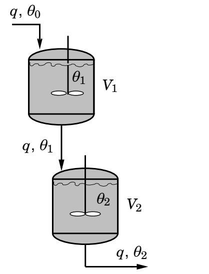


- Stegsvarets fart bestäms av polens avstånd från origo

Andra ordningens system med reella poler

$$G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}, \qquad T_1, T_2 > 0$$

Exempel: Temperaturdynamik in kopplade tankar:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_2:

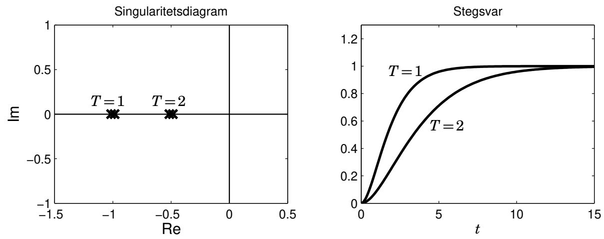
$$G(s) = \frac{1}{(1+s\frac{V_1}{q})(1+s\frac{V_2}{q})}$$

Andra ordningens system med reella poler

- Poler:
$$s = -1/T_1, \quad s = -1/T_2$$
- Stegsvar:
  - Laplace:
$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$
  - Invers Laplacetransform 24. och 25. i formelsamling:
$$y(t) = \begin{cases} K\left(1 - \frac{T_1e^{-t/T_1} - T_2e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2}\right), & T_1 \neq T_2 \\ K\left(1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T}e^{-t/T}\right), & T_1 = T_2 = T \end{cases}$$
- Två tidskonstanter: T_1, T_2

Andra ordningens system med reella poler

$K = 1$:



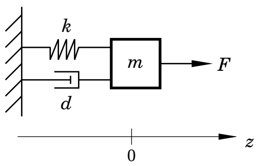
- Två poler ger mjukare och långsammare svar än en pol
  - ekvivalent tidskonstant: $T_{eq} = T_1 + T_2$
- Om $T_1 \gg T_2$ beter sig systemet som 1a ordningens med tidskonstant T_1

Andra ordningens system med komplex poler

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \qquad \omega_0 > 0,\ 0 < \zeta < 1$$

- ω_0 = odämpad frekvens
- ζ = relativ dämpning

Exempel: Positionsdynamik för mekaniskt system



Överföringsfunktion från F till z:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}$$

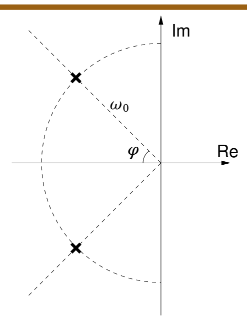
Komplexa poler om $d < 2\sqrt{km}$

Andra ordningens system med komplexa poler

Poler:

$$s = -\zeta\omega_0 \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0$$

$$\zeta = \cos\varphi$$



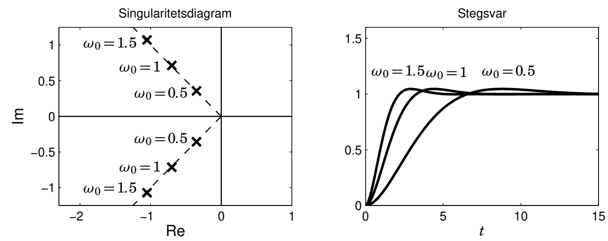
Stegsvar:

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arccos\zeta\right)\right)$$

(invers Laplace transform 28. i formelsamling)

Andra ordningens system med komplexa poler

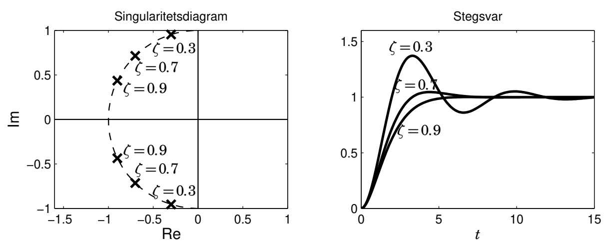
$K = 1$:



- Systemets fart bestäms av polernas avstånd från origo

Andra ordningens system med komplexa poler

$K = 1$:



- Systemets dämpning bestäms av polernas vinkel till reell axel

System med nollställen

- Antag att systemet är på formen

$$(1 + T_z s)G_0(s)$$

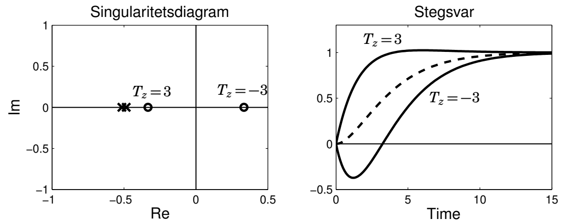
- Nollställe: $s = -\frac{1}{T_z}$
- Stegsvar:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(1 + T_z s)G_0(s)\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G_0(s)\frac{1}{s}\right\} + T_z\mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\}$$

  - Viktad summa av stegsvar och impulssvar för $G_0(s)$
  - Stor påverkan om nollställe när origo (T_z stor)

Andra ordningens system med nollställe

Exempel: $G(s) = \dfrac{1 + sT_z}{(1 + 2s)^2}$



Sträckat stegsvar för $G_0(s) = \dfrac{1}{(1 + 2s)^2}$

- Nollställen påverkar initialt stegsvar
- Nollställen i höger halvplan ger omvänt initialt stegsvar

System med tidsfördröjningar

- Antag att systemet ges av:

$$G(s) = G_0(s)e^{-sL}, \quad L > 0$$

- Stegsvar för del utan fördröjning $G_0(s)$:

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G_0(s)\frac{1}{s}\right\}$$

- Stegsvar med fördröjning:

$$y(t) = y_0(t - L)$$

(invers Laplacetransform 3. operationslexikon)

(e^{-sL} kan ej tolkas med ändligt antal poler $\Rightarrow$ oändligtdimensionellt system)

Tolkning av poler och nollställen

Poler

- Beror bara på A-matris, på systemets inre dynamik
- Bestämmer systemets:
  - fart
  - dämpning

Nollställen

- Svårare att tolka
- Beror på hur insignaler och utsignaler är kopplade till systemet (beror alltså också på B, C och D)
- Påverkar huvudsakligen initialt beteende i stegsvar