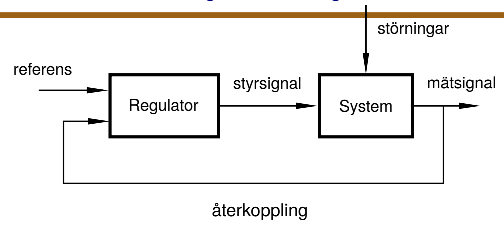
Reglerteknik AK – F2

- Processmodeller
  - Tillståndsform
  - Överföringsfunktioner
- Linjärisering
- Blockdiagramräkning

Regulatordesign



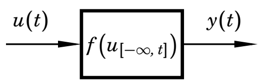
Regulatordesign

- Designa regulator så system får önskat beteende

Hur?

- Skapa (matematisk) *modell* av systemet som ska styras
- Designa regulator så den kan styra modellen och hantera störningar
- Designa så att det funkar även när modellen är lite fel

Dynamiska system

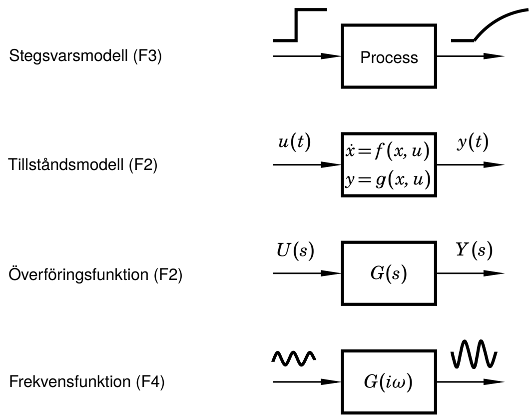


- Utsignalen beror på alla gamla insignaler
- Modeller på formen $f\left(u_{[-\infty,\,t]}\right)$ opraktiska att räkna med
- Basen för våra modeller kommer vara differentialekvationer

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0\frac{d^n u}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n u$$

som kommer från t.ex. massbalans, energibalans, fysikaliska samband

Processmodeller i kursen



Tillståndsformen

Inför tillstånd (states) $x_1, \ldots, x_n$ så att $n$te ordningens differentialekvation

$$\tfrac{d^n y}{dt^n} + a_1\tfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0\tfrac{d^n u}{dt^n} + b_1\tfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n u$$

kan skrivas som n första ordningens differentialekvationer

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n, u) \\ \vdots & \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n, u) \end{cases}$$

med mätekvation

$$y = g(x_1, \ldots, x_n, u)$$

Tillstånden $x_1, \ldots, x_n$ innehåller värdet av alla ackumulerade storheter

Tillståndsformen – vektornotation

- Introducera vektor x och vektorvärd funktion f:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

n = antal tillståndsvariabler = systemets ordningstal

- Systemet kan då skrivas på vektorform som

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad \text{(tillståndsekvation)}$$
$$y = g(x, u) \qquad \text{(mätekvation)}$$

där f och g är vektorvärda, potentiellt olinjära, funktioner

(använder även notation $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ för tidsderivator)

Exempel

- System beskrivet av differentialekvation: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu$
- Inför tillstånd: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, vilket ger:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_2 y + bu = -a_1 x_2 - a_2 x_1 + bu$$

- Modellen skriven på tillståndsform med matriser blir:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}_{D} u$$

Tillståndsformen för linjära system

På matrisform:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad \text{(tillståndsekvation)}$$
$$y = Cx + Du \qquad \text{(mätekvation)}$$

- x och u anger avvikelser från en jämviktspunkt
- $(x, u) = (0, 0)$ är alltid en jämviktslösning – varför?
- D kallas systemets direktterm och är ofta 0 för verkliga processer

Miniproblem: Vilka dimensioner har matriserna A, B, C och D?

Olinjära system

- Om f eller g är olinjära kallas systemet olinjärt
- Hur analyserar vi olinjära system $\Rightarrow$ linjärisering kring jämviktspunkt

Jämviktspunkter

- Olinjär process på tillståndsform:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,u)\\ y &= g(x,u)\end{aligned}$$

- Processens jämviktspunkter *(equilibria)* eller stationära punkter *(stationary points)* är alla punkter (x^0, u^0) där

$$f(x^0, u^0) = 0$$

d.v.s. tillståndsvariablernas tidsderivator är noll.

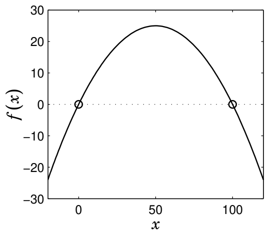
Exempel: Logistisk tillväxtmodell

Dynamisk modell (utan styrsignal):

$$\frac{dx}{dt} = x\left(1 - \frac{x}{100}\right) = f(x)$$

Jämviktspunkter:

$$x^0\left(1 - \frac{x^0}{100}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^0 = 0 \\ x^0 = 100 \end{cases}$$



Linjärisering – en variabel

Antag olinjärt system i en skalär variabel: $\dot{x} = f(x)$

1. Hitta stationär punkt x^0, där $f(x^0) = 0$
2. Approximera $f(x)$ med en rät linje genom x^0:

$$f(x) \approx \underbrace{f(x^0)}_{=0} + \underbrace{\frac{df}{dx}(x^0)}_{a}(x - x^0)$$

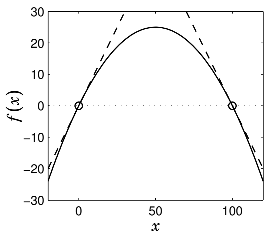
3. Byt tillståndsvariabel och betrakta istället avvikelser Δx från jämviktspunkten:

$$\Delta x = x - x^0$$

4. Systemet kan då skrivas

$$\frac{d\Delta x}{dt} \approx a\Delta x$$

Exempel: Logistisk tillväxtmodell



$$x^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Delta x}{dt} \approx \Delta x$$

$$x^0 = 100 \;\Rightarrow\; \frac{d\Delta x}{dt} \approx -\Delta x$$

Viktigt: Linjärisering gäller bara i närheten av linjäriseringspunkten!

Linjärisering – allmänna fallet

1. Bestäm en stationär punkt (x^0, u^0) till systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,u)\\ y &= g(x,u)\end{aligned}$$

2. Gör 1:a ordningens Taylorapproximationer av f och g kring (x^0, u^0):

$$\begin{aligned} f(x,u) &\approx \underbrace{f(x^0,u^0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,u^0)(x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^0,u^0)(u - u^0)\\ g(x,u) &\approx \underbrace{g(x^0,u^0)}_{=y^0} + \frac{\partial g}{\partial x}(x^0,u^0)(x - x^0) + \frac{\partial g}{\partial u}(x^0,u^0)(u - u^0)\end{aligned}$$

Linjärisering – allmänna fallet

3. Inför nya variabler $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$
4. Systemet kan nu skrivas som

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x,u) &\approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,u^0)}_{A}\Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x^0,u^0)}_{B}\Delta u\\ \Delta y = g(x,u) - y^0 &\approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x^0,u^0)}_{C}\Delta x + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}(x^0,u^0)}_{D}\Delta u\end{aligned}$$

Linjärisering – allmänna fallet

- Kom ihåg: f och g kan vara vektorer
- Exempel: Två tillståndsvariabler x_1 och x_2, en styrsignal u och en mätsignal y innebär

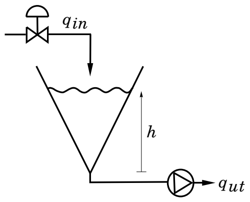
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} \text{ är skalär}$$

Exempel: Linjärisering av konisk tank



Antag att q_{ut} är konstant. Modell (från massbalans):

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{4}{\pi h^2}(q_{in} - q_{ut}) && = f(h, q_{in}) \\ y &= h && = g(h, q_{in}) \end{aligned}$$

Exempel: Linjärisering av konisk tank

1. Stationär punkt: $f(h^0, q_{in}^0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{in}^0 = q_{ut}$
2. Beräkna partiella derivator:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h}(h^0, q_{in}^0) &= -\frac{8}{\pi (h^0)^3}(q_{in}^0 - q_{ut}) & \frac{\partial f}{\partial q_{in}}(h^0, q_{in}^0) &= \frac{4}{\pi (h^0)^2} \\ \frac{\partial g}{\partial h}(h^0, q_{in}^0) &= 1 & \frac{\partial g}{\partial q_{in}}(h^0, q_{in}^0) &= 0 \end{aligned}$$

3. Nya variabler: $\Delta h = h - h^0$, $\Delta q_{in} = q_{in} - q_{in}^0$, $\Delta y = y - y^0$
4. Linjär tillståndsmodell:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta h}{dt} &\approx \frac{4}{\pi (h^0)^2}\Delta q_{in} \\ \Delta y &= \Delta h \end{aligned}$$

Laplacetransformen

Mål: Lösa/analysera differentialekvation

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n u$$

med hjälp av Laplacetransform

Laplacetransformen

- Definition:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

  där $f(t)$ är funktion av tiden
- En räkneregel:

$$\mathcal{L}\{\frac{df}{dt}\} = sF(s) \qquad (\text{om } f(0) = 0)$$

  (många fler i formelsamling)

Exempel

- System beskrivet av differentialekvation: $\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_1 \dot{u} + b_2 u$
- Laplacetransformera:

$$(s^2 + a_1 s + a_2) Y(s) = (b_1 s + b_2) U(s),$$

  vilket ger:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{\text{överföringsfunktion } G(s)} U(s)$$

- Obs: överföringsfunktioner finns bara för linjära system

Poler och nollställen

Överföringsfunktionen kan ofta skrivas som ett rationellt uttryck:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad \deg Q \le \deg P$$

Nollställen *(zeros)*: rötter till $Q(s) = 0$

Poler *(poles)*: rötter till $P(s) = 0$ (karakteristisk ekvation)

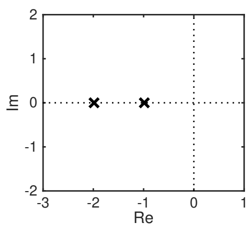
Kan ritas i ett singularitetsdiagram/pol-nollställe-diagram

- Poler: x
- Nollställen: o

Exempel

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} U(s)$$

- Överföringsfunktion: $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$
- Nollställen: $1 = 0$ har inga lösningar
- Poler: $(s+1)(s+2) = 0$ har lösningar $s_1 = -1$, $s_2 = -2$



Samband tillståndsform–överföringsfunktion

Linjärt tidsinvariant system på tillståndsform:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Antag alla initialvärden noll: $x(0) = 0$

Laplacetransformera:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Samband tillståndsform–överföringsfunktion

Lös ut $X(s)$:

$$
\begin{aligned}
(sI - A)X(s) &= BU(s) \\
X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s)
\end{aligned}
$$

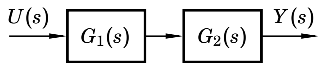
Sätt in i ekvationen för $Y(s)$:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\
&= \underbrace{\Big(C(sI - A)^{-1}B + D\Big)}_{G(s)} U(s)
\end{aligned}
$$

- $G(s)$ nämnare ges av $\det(sI - A)$
- Poler till $G(s)$ $\Leftrightarrow$ egenvärden till A
- Många olika tillståndsformer för samma överföringsfunktion!

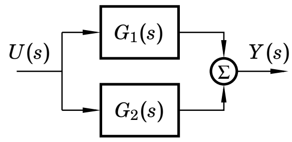
Blockdiagramräkning med överföringsfunktioner

Seriekoppling:



$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

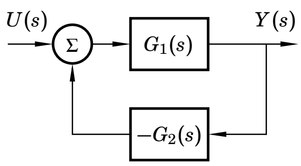
Parallellkoppling:



$$Y(s) = \Big(G_1(s) + G_2(s)\Big)U(s)$$

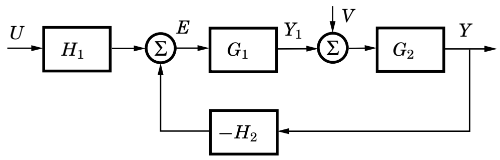
Blockdiagramräkning med överföringsfunktioner

Återkoppling:



$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G_1(s)\Big(U(s) - G_2(s)Y(s)\Big) \\
Y(s)\Big(1 + G_1(s)G_2(s)\Big) &= G_1(s)U(s) \\
Y(s) &= \frac{G_1(s)}{1 + G_1G_2(s)}U(s)
\end{aligned}
$$

Exempel



Beräkna överföringsfunktionerna från U och V till Y.

$$
\begin{aligned}
Y &= G_2(V + Y_1) \\
Y_1 &= G_1E \\
E &= H_1U - H_2Y
\end{aligned}
$$

Lös ut Y:

$$Y = \frac{G_2G_1H_1}{1 + G_2G_1H_2}U + \frac{G_2}{1 + G_2G_1H_2}V$$