LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 20 april kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

På dennan distanstentamen är alla hjälpmedel tillåtna. Men man får naturligtvis inte fråga någon eller ta emot hjälp. Man ska ha kontakt med tentamensvakt och vara villig att bli övervakad via kamera samt dela sin datorskärm via zoom.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas så fort som möjligt via Ladok. Tid och form för tentavisning meddelas senare, se kursens hemsida.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 20200420

1. Betrakta systemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

a. Bestäm överföringsfunktionen från u till y. (1 p)

b. Bestäm systemets poler, nollställen och statisk förstärkning $G(0)$. Är systemet instabilt, (marginellt) stabilt, eller asymptotiskt stabilt? (2 p)

Solution

a. överföringsfunktionen från u till y ges av

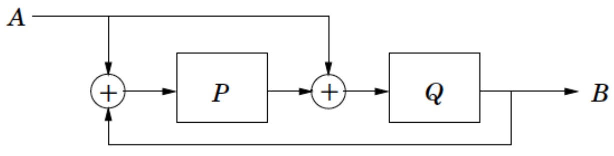
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+3s+2}.$$

b. Polerna ges av rötterna till överföringsfunktionens nämnarpolynom

$$p(s) = (s+1)(s+2).$$

Alltså har systemet en pol i $s = -1$ och en pol i $s = -2$. Eftersom realdelen av alla poler är strikt negativ, så är systemet asymptotiskt stabilt.

2. Bestäm överföringsfunktionen från A till B för systemet i Figur 1 uttryckt med P och Q.



Figur 1: Blockschemat för Uppgift **2**

(2 p)

Solution

Blockschemaberäkningar ger att

$$B = Q(P(B+A)+A) = QPB + Q(P+1)A$$
$$\iff B(1-QP) = Q(P+1)A$$
$$\iff B = \frac{Q(P+1)}{1-QP}A.$$

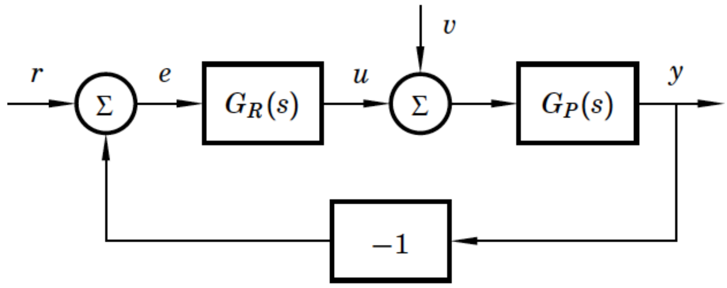
överföringsfunktionen från A till B ges alltså av

$$\frac{Q(P+1)}{1-QP}.$$

3. En klåpare till ingenjör har misslyckats i sin design av ett kritiskt processteg i en nybyggd toalettpappers-fabrik. Detta har resulterat i en instabil process. Ingenjörens något mer kompetenta kollega har lyckats härleda en modell av processen

$$G_P(s) = -\frac{s+1}{s-3}$$

och hyser gott hopp om att processen skall kunna stabiliseras med en regulator. Regulator och process är kopplade i enlighet med blockdiagrammet i figur 2.



Figur 2: Blockdiagram för process i uppgift 3.

a. Bestäm parametrarna $K > 0$ och $T_i > 0$ för en PI-regulator, $G_R(s)$, som stabiliserar processen och därmed säkrar Nordens toalettpappersförsörjning. (2 p)

b. Beräkna det stationära felet då processen utsätts för en laststörning i form av en ramp, $v(t) = t$. Systemet börvärde antas vara noll. (2 p)

Solution

a. överföringsfunktionen för en PI-regulator är

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

och det slutna systemets överföringsfunktion är

$$G_{cl}(s) = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} = \frac{(s+1)\,K\,(sT_i+1)}{T_i\,(K-1)\,s^2 + (KT_i + K + 3T_i)\,s + K} = $$
$$= \frac{(s+1)\,K\,(sT_i+1)\,/(T_i(K-1))}{s^2 + \frac{KT_i+K+3T_i}{T_i(K-1)}s + \frac{K}{T_i(K-1)}}.$$

Ett andra ordningens system med polpolynom $p(s) = s^2 + a_1 s + a_2$ är asymptotiskt stabilt om och endast om samtliga koefficienter är positiva, d.v.s. $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$. Eftersom integraltiden $T_i > 0$, så är det slutna systemet asymptotiskt stabilt för alla PI-regulatorer med $K > 1$.

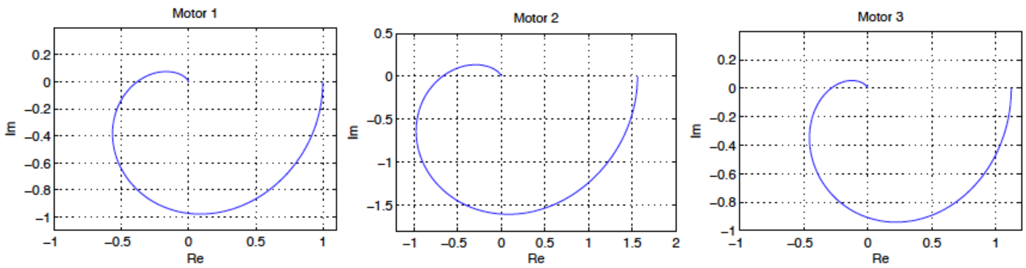
b. överföringsfunktionen från v till e är

$$G_{ev}(s) = -\frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = -\frac{s(s+1)T_i}{T_i\,(K-1)\,s^2 + (KT_i + K + 3T_i)\,s + K}$$

Laplacetransformering av laststörningen ger $V(s) = \frac{1}{s^2}$. Under förutsättning att PI-regulatorn valts så att systemet är asymptotiskt stabilt kan slutvärdesteoremet användas och det stationära felet ges då av

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ev}(s)\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0} -\frac{(s+1)\,T_i}{T_i\,(K-1)\,s^2 + (KT_i + K + 3\,T_i)\,s + K} = -\frac{T_i}{K} \end{aligned}$$

4. En tryckkokare med motordriven inflödesventil ska serietillverkas men motorerna som kommer från tre olika underleverantörer verkar vara lite olika. I Figur 3 ges Nyquistkurvorna för de tre motorerna. Anta att motorerna ska styras av en P-regulator, $u(t) = Ke(t)$. Vilket är det största positiva K som kommer att ge stabila slutna system för samtliga modeller? (1 p)



Figur 3: De uppmätta Nyquistkurvorna för de olika motordrivna ventilerna i uppg. 4.

Solution

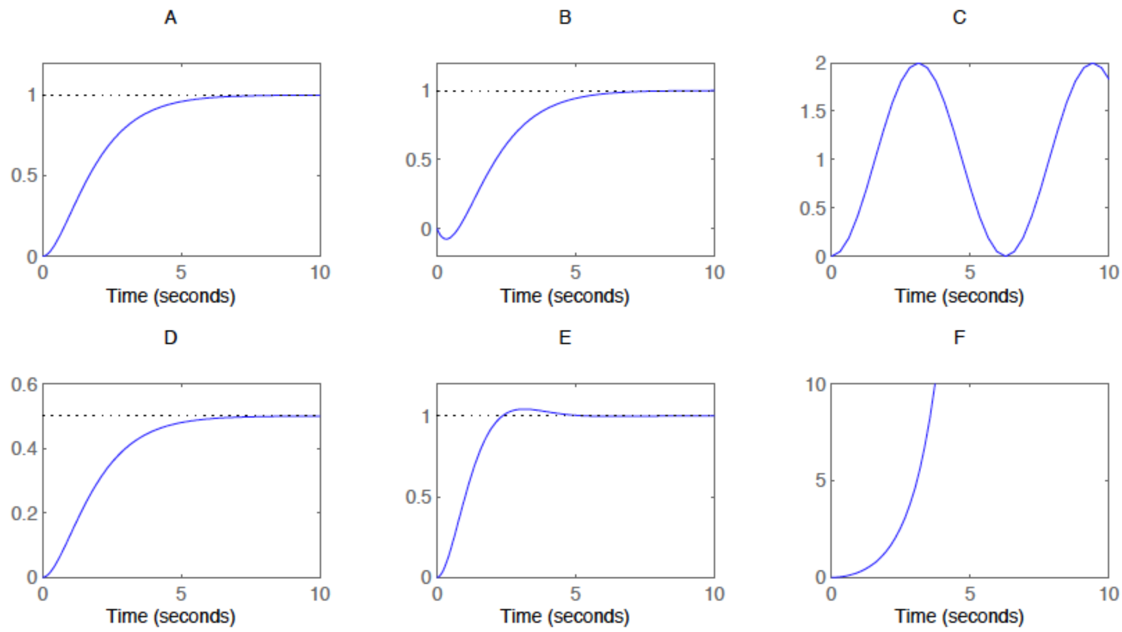
Lösningen består av att vi tar fram vilket system som lättast blir instabilt vid återkoppling med en P-regulator (d.v.s. en förstärkning K), vilket ges av amplitudmarginalen. Denna kan avläsas i diagrammen genom att hitta var Nyquistkurvan skär negativa reella axeln. Amplitudmarginalen ges då av $-1/x_c$, om x_c är koordinaten för skärningspunkten. Avläsning i diagrammen ger att $A_m^1 \approx 2.5$, $A_m^2 \approx 1.42$, $A_m^3 \approx 3.3$, vilket således tillåter ett maximalt K på 1.42

5. Para ihop överföringsfunktionerna (G_1-G_4) nedan med rätt stegsvar (A-F) i Figur 4. Motivera (det räcker inte att enbart hänvisa till matlab). (2 p)

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2},$$
$$G_3(s) = \frac{1}{2s^2 + 4s + 2}, \qquad G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Solution

Bland överföringsfunktionerna G_1-G_4 finns inget system som har något nollställe i höger halvplan (ingen av överföringsfunktionerna har något nollställe



Figur 4: Stegsvar i Uppgift 5.

alls) och inget system som är instabilt (dvs. har någon pol i höger halvplan). Detta betyder att stegsvar B (som initialt går åt fel håll) och stegsvar F (som ej är begränsat) kan uteslutas.

G_1: Systemet har två reella poler i -1 och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1$. Eftersom polerna är reella fås ingen översläng, så detta måste svara mot stegsvar A, som har slutvärdet 1.

G_2: Systemet har två komplexkonjugerade poler i $-1 \pm i$ och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1$. Detta måste svara mot stegsvar E som har en översläng och slutvärdet 1.

G_3: Systemet har två poler i -1 och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 0.5$. Detta måste därför svara mot stegsvar D som har slutvärdet 0.5.

G_4: Systemet har två poler på imaginära axeln i $\pm i$ och är därmed stabilt men inte asymptotiskt stabilt. Därför måste detta svara mot stegsvar C, som är begränsat men ej når ett slutvärde.

6. Spridningen av viss typ av virus i en population kan modelleras med den så kallade SIS-modellen (där SIS står för Susceptible Infected Susceptible), vilken ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{\beta}{N}x_1x_2(1-u) + \gamma x_2\\ \dot{x}_2 &= \frac{\beta}{N}x_1x_2(1-u) - \gamma x_2\\ y &= x_2\end{aligned}$$

där x_1 är antalet *icke-infekterade*, eller mottagliga, individer, x_2 är antalet *infekterade* individer och N är antalet individer i populationen. Spridningstakten β anger produkten av antalet personer som en infekterad individ i snitt har konktakt med per tidsenhet och sannolikheten för att viruset sprids vid varje kontakt, medan γ är återhämtningstakten, d.v.s. snittiden för att tillfriskna är $1/\gamma$. Styrsignalen $u \in [0,1]$ innefattar åtgärder för att minska smittorisken, som t.ex. social distansering och förbättrade hygienrutiner.

a. Antag att $u = 0$ och visa att $x_1 = N\gamma/\beta, x_2 = N - x_1$ är en jämviktspunkt. (0.5 p)

b. Linjärisera systemet kring jämviktspunkten i föregående deluppgift. (2 p)

c. Visa att det linjäriserade systemet inte är styrbart. Hur tolkar du resultatet? (1.5 p)

Solution

a. Vi har systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{\beta}{N}x_1x_2(1-u) + \gamma x_2 =: f_1(x_1,x_2,u)\\ \dot{x}_2 &= \frac{\beta}{N}x_1x_2(1-u) - \gamma x_2 =: f_2(x_1,x_2,u)\\ y &= x_2 =: g(x_1,x_2,u)\end{aligned} \tag{1}$$

För $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (N\frac{\gamma}{\beta}, N - x_1 = N\frac{\beta-\gamma}{\beta}, 0)$ får vi

$$\begin{aligned}f_1(x_1^0,x_2^0,u^0) &= -\frac{\beta}{N}N\frac{\gamma}{\beta}N\frac{\beta-\gamma}{\beta}(1-0) + \gamma N\frac{\beta-\gamma}{\beta} = -\gamma N\frac{\beta-\gamma}{\beta} + \gamma N\frac{\beta-\gamma}{\beta} = 0\\ f_2(x_1^0,x_2^0,u^0) &= -f_1(x_1^0,x_2^0,u^0) = 0\end{aligned}$$

Alltså gäller det för (x_1^0, x_2^0, u^0) att $\dot{x}_1 = 0$ samt $\dot{x}_2 = 0$, och detta är således en jämviktspunkt.

b. Vi får följande partiella derivator

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{\beta}{N}x_2(1-u), \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\beta}{N}x_1(1-u) + \gamma, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\beta}{N}x_1x_2,\\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\beta}{N}x_2(1-u), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\beta}{N}x_1(1-u) - \gamma, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{\beta}{N}x_1x_2,\\ &\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.\end{aligned}$$

Derivatorna evalueras i (x_1^0, x_2^0, u^0):

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \gamma - \beta, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = N\frac{\gamma}{\beta}(\beta - \gamma),$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \beta - \gamma, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = N\frac{\gamma}{\beta}(\gamma - \beta),$$
$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

Vi introducerar de nya variablerna $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, $\Delta u = u - u^0$ samt $\Delta y = y - y^0$ och får det linjäriserade systemet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x &= \begin{pmatrix} \gamma - \beta & 0 \\ \beta - \gamma & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} N\frac{\gamma}{\beta}(\beta - \gamma) \\ N\frac{\gamma}{\beta}(\gamma - \beta) \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta x \end{aligned}$$

c. System-matriserna har strukturen $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$ för några konstanter a och b. Vi får styrbarhetsmatris

$$\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & ab \\ -b & -ab \end{pmatrix}$$

vilken har determinant 0. Systemet är därför inte styrbart. Orsaken är att summan av tillstånden $x_1 + x_2$ inte går att påverka. Vi har nämligen att $x_1 + x_2 = N$ hela tiden. Detta beror på att inga individer föds eller dör i denna modell.

7. Designa en tillståndsåterkopplingsregulator på formen

$$u = -Lx + l_r r$$

för systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x. \end{aligned}$$

Det slutna systemet ska ha en pol i $s = -1$ och en pol i $s = -2$ och det ska inte uppstå något stationärt fel. (3 p)

Solution

Insättning av styrlagen i differentialekvationen ger att

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BLx + Bl_r r.$$

Laplacetransformering ger att

$$\begin{aligned} & sX = AX - BLX + Bl_r R \\ \iff & (sI - (A - BL))X = Bl_r R \\ \iff & X = (sI - (A - BL))^{-1} Bl_r R. \end{aligned}$$

Utsignalekvationen ger då att

$$Y = CX = C(sI - (A - BL))^{-1} Bl_r R.$$

Polerna för det slutna systemet från R till Y ges av lösningarna till

$$0 = \det(sI - A + BL) = \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} s + l_1 + 1 & l_2 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + s(l_1 + 2) + (l_1 + l_2 + 1).$$

Matchning av koefficienter med det önskade polpolynomet

$$p(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

ger

$$\begin{cases} s^2: & 1 = 1, \\ s^1: & l_1 + 2 = 3 \Leftrightarrow l_1 = 1, \\ s^0: & l_1 + l_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow l_2 = 0. \end{cases}$$

I stationäritet ges det slutna systemet av

$$\dot{x} = 0 = (A - BL)x + Bl_r r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} l_r r,$$

$$y = Cx \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = -2x_1 + l_r r, \\ 0 = x_1 - x_2, \\ y = x_2. \end{cases}$$

Eftersom vi inte vill ha något stationärt fel så får vi även villkoret $r = y$, vilket ger oss den unika lösningen $l_r = 2$. (Den tredje ekvationen ger $x_2 = r$. Den andra ekvationen ger sedan $x_1 = x_2 = r$. Slutligen ger då den första ekvationen $-2r + l_r r = 0 \Leftrightarrow l_r = 2$.) Den sökta styrlagen är alltså

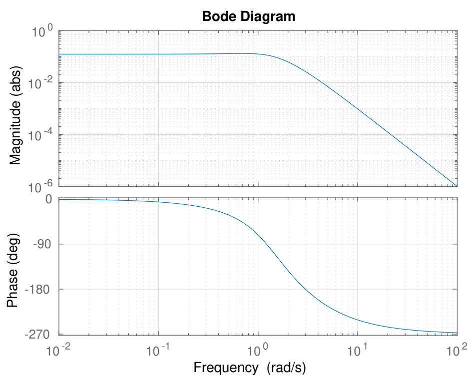
$$u = -x_1 + 2r.$$

Notera att det även är möjligt att finna l_r genom att lösa

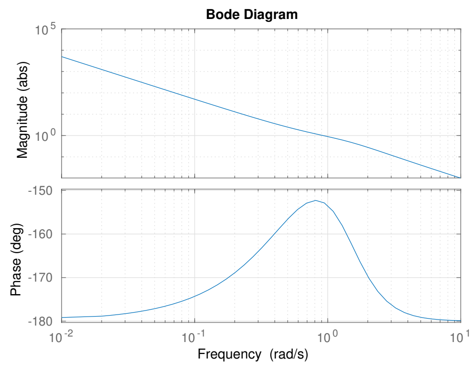
$$C(sI - (A - BL))^{-1} Bl_r = 1$$

för $s = 0$.

8. En process $G_p(s)$ ska styras via återkoppling med en regulator $G_r(s)$. Bodediagrammet för $G_p(s)$ syns i figur (a) ovan. Bodediagrammet för $G_r(s)G_p(s)$ syns i figur (b) ovan. Båda funktionerna kan antas vara rationella funktioner av s, alltså bestå enbart av polynom i täljare och nämnare.



(a) $G_p(s)$



(b) $G_r(s)G_p(s)$

a. Innehåller regulatorn $G_r(s)$ en integrerande effekt? Motivera ditt svar genom bodediagrammen ovan. (1 p)

b. Är det återkopplade systemet stabilt? (1 p)

Solution

a. I och med att $G_p(s)$ för låga frekvenser har fasen 0 och $G_r(s)G_p(s)$ har fasen -180 måste $G_r(s)$ vid låga frekvenser vara $1/s^2$. Vi har därför en dubbelt integrerande effekt och svaret är därmed ja.

b. Skärfrekvensen för $G_r(s)G_p(s)$ är enligt figuren $1rad/s$, och där är fasmarginalen ca 28 grader. Därmed är det återkopplade systemet stabilt.

9 a. Låt G vara ett systems överföringsfunktion och y vara systemets stegsvar. Visa att stegsvarets initialderivata $\dot{y}(0)$ är skiljd från noll om G är asymptotiskt stabil och given av

$$G_1(s) = \frac{b}{s+a},$$

men noll om G är asymptotiskt stabil och given av

$$G_2(s) = \frac{e}{(s+c)(s+d)},$$

där a, b, c, d och e är positiva och reella konstanter.

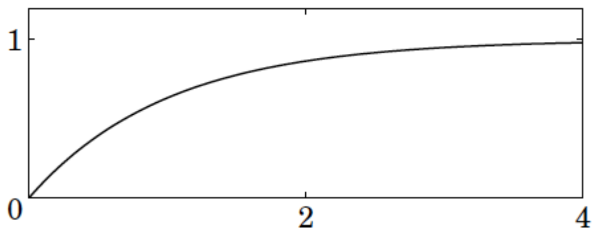
(2 p)

b. Stegsvaret av systemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

visas i Figur 6. Trots att systemet är av andra ordningen så är $\dot{y}(0) \neq 0$. Förklara hur detta är möjligt, trots resultatet i Uppgift **a**. (2 p)

Solution



Figur 6: Stegsvaret i Problem **b**

a. Laplacetransformen av stegsvarets tidsderivata ges av

$$sY(s) = sG(s)U(s) = sG(s)\frac{1}{s} = G(s).$$

Eftersom både G_1 och G_2 är asymptotiskt stabila så har $sG(s)$ alla poler i vänstra halvplanet. Begynnelsevärdesteoremet ger då att

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s).$$

För G_1 fås alltså att

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} sG_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+a}b = \lim_{s\to\infty} \left(1 - \frac{a}{s+a}\right) b = b$$

och för G_2 fås att

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} sG_2(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{es}{(s+c)(s+d)} = \lim_{s\to\infty} \frac{es}{s^2 + \mathcal{O}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{es}{s^2} = 0.$$

b. Överföringsfunktionen för systemet ges av

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Eftersom vi förkortade bort en pol och ett nollställe i överföringsfunktionen så har alltså systemet bara första ordningens dynamik, trots att vi i vår tillståndsrepresentation hade två tillstånd.

Kommentar: Ett alternativt sätt att lösa uppgiften på är att ta sig en närmare titt på tillståndsrepresentationen, vilket avslöjar att y bara beror på x_1, som i sin tur inte beror på x_2. Om vi förkastar det andra tillståndet så fås alltså ändå precis samma relation mellan insignal och utsignal.