F09: Tillståndsskattning, Observerbarhet

11 Februari, 2019

Lunds Universitet, Inst för Reglerteknik

F09 — Innehåll

- Integraldel i regulatorn (tillståndsåterkoppling)
- Observerbarhet
- Tillståndsskattning (Kalmanfilter/Observatör)

1

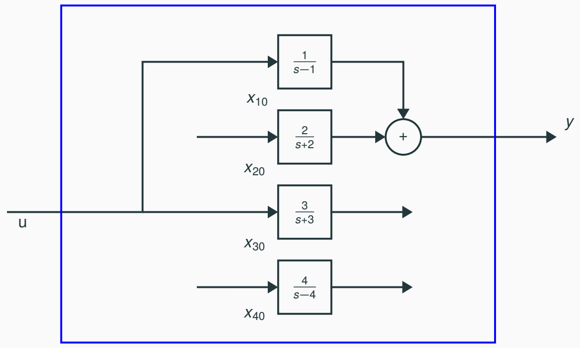
Förra föreläsningen

1. Styrbar form
2. Tillståndsåterkoppling
3. Exempel
4. Styrbarhet
5. (Integraldel i regulatorn)

2

Styrbarhet och observerbarhet

Exempel av Kalmans uppdelning



3

Föreläsning 9 — Rekonstruktion

1. Integraldel i regulatorn (tillståndsåterkoppling)
2. Observerbarhet
3. Kalmanfilter
4. Observerbar form

4

Förra veckan

Tillståndsåterkoppling ger slutna systemet

$$\dot{x} = (A - BL)x + Bl_{\text{ref}}\, r$$

Styrbarhet

$$[B \;\; AB \;\dots\; A^{n-1}B] \text{ full rang}$$

gör att egenvärdena till $A - BL$ kan placeras godtyckligt.

5

Integralverkan

Inför ett extra integratortillstånd x_i:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + Bu \\ r - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

och tillämpa tillståndsåterkoppling

$$u = -\begin{bmatrix} L & l_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + l_{\text{ref}}\, r$$

Detta utnyttjas i Laboration 3 och beskrivs närmare i labhandledningen.

6

Introducera ett **extra tillstånd** x_i som integralen av reglerfelet.

$$x_i = \int (r - y)dt \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_i = r - y = r - Cx$$

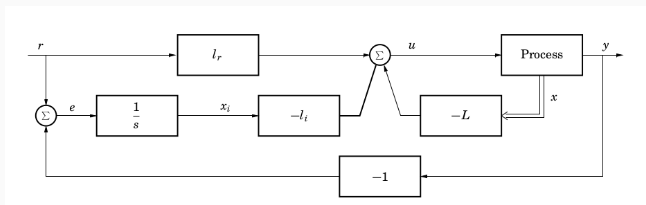


Figure 1: Introducera **extra tillstånd** x_i för tillståndsreglering med integraldel.

7

Om vi **utökar** tillståndsvektorn x med integraltillståndet x_i så att

$$x_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \\ \mathbf{x_i} \end{bmatrix}$$

kan det utökade system skrivas

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r = A_e x_e + B_e u + B_r r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} x_e = C_e x_e$$

Vi har därmed fått en regulator med integraldel. I stationäritet gäller att $\dot{x}_e = 0$ och därmed $\dot{x}_i = r - y = 0$.

Tillståndsåterkoppling med integraldel (forts)

Regulatorn bli nu

$$u = l_r r - Lx - l_i x_i = l_r r - L_e x_e$$

där

$$L_e = \begin{bmatrix} L & l_i \end{bmatrix}$$

Detta ger det återkopplade (slutna) systemet som

$$\dot{x}_e = (A_e - B_e L_e) x_e + (B_e l_r + B_r) r$$

$$y = C_e x_e$$

Parametrarna i **vektorn L_e väljs som**[1] så att vi får det önskade closed-loop pole placement, just as previously. Polernas placering ges av det karaktäristiskt polynomet

$$\det(sI - (A_e - B_e L_e))$$

[1] INTE samma värde för L med resp utan integraldel!

Rekonstruktion / Tillståndsskattning

Kan vi, från mätningar av u och y över ett tidsintervall, rekonstruera x?

Svar: Ja, om systemet är “observerbart”!

Observerbarhet

Ett tillstånd sägs vara *icke observerbart* (“tyst”) om insignalen $u \equiv 0$ resulterar i utsignalen $y \equiv 0$.

Ett system är *observerbart* om det saknar icke observerbara tillstånd.

OBS. B- och D-matriserna påverkar inte.’

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

Bestäm $x(0)$ från y!

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x(0) \\ y'(t) &= CAe^{At}x(0) \\ &\vdots \\ y^{n-1}(t) &= CA^{n-1}e^{At}x(0) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{W_o} x(0)$$

Observerbarhetskriterium

Ett system är observerbart om och endast om

$$\operatorname{rank} W_o = n$$

Bevis

Om rank $W_o = n$ och $x(0) \neq 0$ så $\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \neq 0$ alltså $y \neq 0$

Om rank $W_o \neq n$, välj $x(0) \neq 0$ med $W_o x(0) = 0$. Då är

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x(0) = C\left[I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots\right]x(0) \\ &= [\text{Cayley-Hamilton}] \\ &= C\left[\alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \ldots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1}\right]x(0) \\ &= [\alpha_0(t)\ldots\alpha_n(t)]W_o x(0) \equiv 0 \end{aligned}$$

Givet u, y, hur kan man skatta x?

Försök 1: Simulera $\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu$.

Estimeringsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ satisfierar då

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (Ax + Bu) - (A\hat{x} + Bu) = A\tilde{x}$$

- Fungerar om A stabil
- Utnyttjar inte informationen i y.

Kalmanfilter — Observerare

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

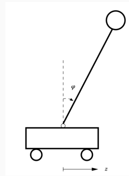
$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - KC)\tilde{x}$$

Välj K lämpligt!

Exempel—Inverterad pendel

Momentekvation: $\ddot{\varphi} = \varphi - u$

Inför tillståndsmodell med $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, $y = \varphi$.



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Kalmanfilter för pendeln

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}(y - \hat{x}_1)$$

$$\det(sI - A + KC) = \det\left(sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

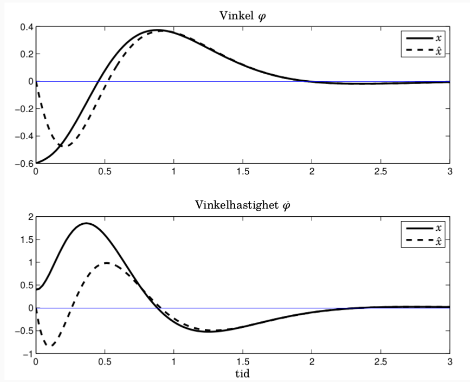
$$= \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 - 1 & s \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + k_1 s + (k_2 - 1)$$

Önskat karakteristiskt polynom $\underbrace{(s + 1 + i)(s + 1 - i)}_{*} = s^2 + 2s + 2$ erhålls

med $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

Riktiga och skattade tillstånd



Observerbar kanonisk form

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n-1} & 0 & & 1 \\ -a_n & & & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x$$

Kalmanfilter på observerbar form

$$A - KC = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n-1} - k_{n-1} & & & 1 \\ -a_n - k_n & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A + KC) = s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + \cdots + a_n + k_n$$

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ * & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & * & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel

$$G(s) = \frac{s + 1}{s(s + 1)} = \frac{s + 1}{s^2 + s}$$

Observerbar form

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad W_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Förkortningar av poler och nollställen ger förlorad styrbarhet eller observerbarhet.

Summering

1. Observerbarhet
2. Kalmanfilter
3. Observerbar form

Nästa vecka

1. Återkoppling från rekonstruerade tillstånd
2. Varning för pol-nollställe-förkortning
3. Laboration 3