F08: Tillståndsåterkoppling, Styrbarhet, Integraldel i regulator

6 Februari, 2019

Lunds Universitet, Inst för Reglerteknik

F08 — Innehåll

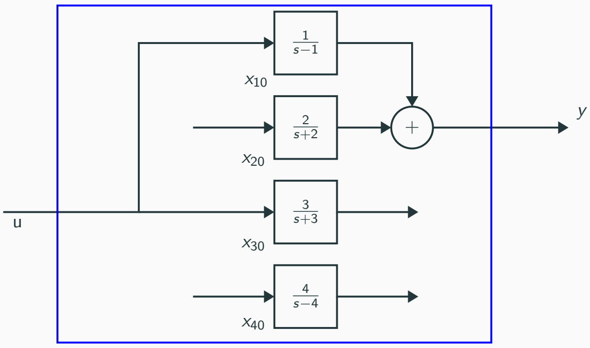
Denna föreläsning

1. Styrbar form
2. Tillståndsåterkoppling
3. Exempel
4. Styrbarhet
5. Integraldel i regulatorn

Nästa föreläsning: Nästan samma, men om *observerbarhet/tillståndsskattning*

Styrbarhet och observerbarhet

Exempel av Kalman's uppdelning

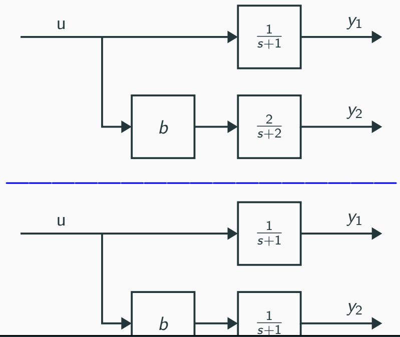


Hur beter sig systemet? Sett utifrån det blå lådan ser vi bara

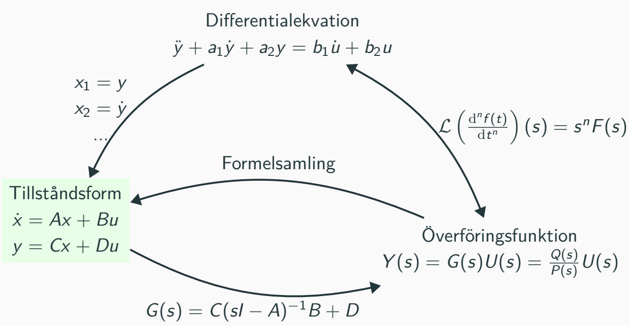
Styrbarhet och observerbarhet

Hur väl kan man reglera två delsystem samtidigt?

- Q: Är det några skillnader på de två olika fallen nedan (och hur beror det på förstärkningen b?



Olika sätt att beskriva dynamiska system



Repetition: tillstånd och tillståndsform

Många fysiska system kan beskrivas av differentialekvationer.

Exampel: Dämpat fjäder-mass-system ($\dot{y} \leftrightarrow$ hastighet, $y \leftrightarrow$ position)

$$m\ddot{y}(t) = -c\dot{y}(t) - ky(t) + F(t)$$

Tillståndsvektorn x är en samling av fysiska storheter som sammanfattar historien och beskriver nuläget.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

x_i kan vara positioner, hastigheter, strömmar, spänningar, kölängder, antal virtuella maskiner, temperaturer, koncentrationer, etc.

Repetition: tillstånd och tillståndsform

Tillståndsformen beskriver hur tillståndens ändras beroende på nuvarande tillstånd x och insignal u enligt

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

där A är en matris och B en kolumnvektor.

Mätsignalen/systemets utsignal ges av

$$y = Cx \ (+Du)$$

Tillståndsform ↔ Överföringsfunktion

Ett system med tillståndsrepresentation

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \ (+Du)$$

har överföringsfunktionen

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

En överföringsfunktion kan skrivas på (oändligt) många olika tillståndsformer.

Standardformerna: **styrbar kanonisk form, observerbar kanonisk form, diagonalform**, se Formelsamling.

F08: Tillståndsåterkoppling

1. Styrbar form
2. Tillståndsåterkoppling
3. Exempel
4. Styrbarhet
5. Integraldel i regulatorn

Styrbar kanonisk formmObserverbar kanonisk form

Systemet med överföringsfunktionen

$$G(s) = D + \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

har styrbar kanonisk formobserverbar kanonisk form

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} z + Du$$

$$\frac{dz}{} \quad \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

PID och tillståndsåterkoppling

PID-regulator:

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + T_d\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right), \qquad e = r - y$$

Tillståndsåterkoppling

$$\begin{aligned} u &= l_{\text{ref}}\, r + l_1(x_{1,ref} - x_1) + l_2(x_{2,ref} - x_2) - \cdots + l_n(x_{n,ref} - x_n) \\ &= \\ &= l_{\text{ref}}\, r - l_1 x_1 - l_2 x_2 - \cdots - l_n x_n \end{aligned}$$

om $x_{1,ref} = x_{2,ref} = \ldots = x_{n,ref} = 0$

Vi kommer även att lägga till integraldel till tillståndsåterkopplingen senare.

Process

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

Karaktäristiska polynomet är $\det(sI - A)$

Regulator

Linjär tillståndsåterkoppling

$$\begin{aligned} u &= l_{\text{ref}}\, r - l_1 x_1 - l_2 x_2 - \cdots - l_n x_n \\ &= l_{\text{ref}}\, r - Lx \end{aligned}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Slutna/Återkopplade systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(l_{\text{ref}}\, r - Lx) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{BL})x + Bl_{\text{ref}}\, r \end{aligned}$$

$$y = Cx$$

$$Y(s) = C[sI - (A - BL)]^{-1}Bl_{\text{ref}}\, R(s)$$

Vi har **ny systemmatris**.
Nya karaktäristiska polynomet är $\det[sI - (A - BL)]$.

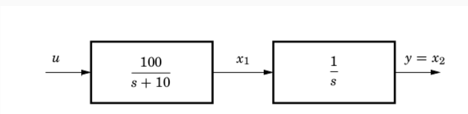
Välj L för att få önskade poler.

Välj l_{ref} för att få $y = r$ i stationaritet.

Exempel 1 — DC-motor

Överföringsfunktionen från spänning till vinkel:

$$G_p(s) = \frac{b}{s(s+a)} = \frac{100}{s(s+10)}$$



Q: Vad motsvarar x_1 respektive x_2?

Tillstånd x_1 motsvarar vinkelhastighet

Tillstånd x_2 motsvarar motorvinkel

Exempel 1 (forts) — Tillståndsform

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$y = x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Example 1 (forts.) — Återkoppling från både x_1 och x_2

Styrlag:

$$u = l_{\text{ref}}\, r - l_1 x_1 - l_2 x_2$$

Slutet system:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a - bl_1 & -bl_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} bl_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

16

DC-motor exempel

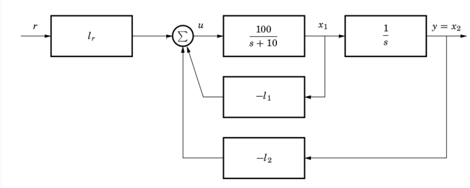


Figure 1: Tillståndsåterkoppling motorreglering.

Styrlagen

$$u = l_r r - l_1 x_1 - l_2 x_2 = l_r r - Lx$$

ger det slutna systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -10 - 100l_1 & -100l_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 100 l_r \\ 0 \end{bmatrix} r$$

17

Exampel 1 (forts)

Karaktäristiskt polynom:

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \begin{vmatrix} s + a + bl_1 & bl_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} \\ &= (s + a + bl_1)s + bl_2 \\ &= s^2 + (a + bl_1)s + bl_2 \end{aligned}$$

Polene kan placeras var vi önskar genom att välja l_1, l_2.

I stationäritet:

$$0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a + bl_1)x_1 - bl_2 x_2 + bl_{\text{ref}}\, r \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ l_2 x_2 = l_{\text{ref}}\, r \end{cases}$$

Välj $l_{\text{ref}} = l_2$. Det ger $x_2 = y = r$ i stationäritet.

18

Exempel 2

Kan vi fritt välja önskat karaktäristiskt polynomial (poler)?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BL) &= \begin{vmatrix} s + 1 + l_1 & l_2 \\ 0 & s + 2 \end{vmatrix} \\ &= (s + 1 + l_1)(s + 2) \end{aligned}$$

Vi **kan inte påverka** x_2!

19

Styrbarhet

Systemet

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

kallas **styrbart** om för varje a och b det existerar en styrsignal u som ändrar systemet från tillstånd $x(0) = a$ till tillstånd $x(t) = b$.

OBS! Stybarhet oberoende av y, C och D!

20

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

Cayley-Hamilton:

$$0 = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n$$

där $\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$.

Vi får då

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots \\ &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \end{aligned}$$

21

Det följer att

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}a + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \\ &= e^{At}a + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A^k B \end{aligned}$$

där $\beta_k = \int_0^t \alpha_k(t-s)u(s)ds$.

Lösnigar får alla a och $b = x(t)$ existerar om och endast om

$$B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$$

är linjärt oberoende.

22

Kriterium för styrbarhet

Systemet $\dot{x} = Ax + Bu$ är styrbart om och endast om (omm)

$$\text{rang}\, \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{W_s} = n$$

Matrisen W_s kallas *styrbarhetsmatrisen*.

23

Example 2

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\operatorname{rang} W_s = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} b & -ab \\ 0 & b \end{bmatrix} = 2 \qquad \text{Styrbart!}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\operatorname{rang} W_s = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \text{Ej styrbart!}$$

Exempel 3a — Pumpning till undre tanken

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - ax_2 + bu \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

$$W_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & -ab \end{bmatrix} \qquad \text{Ej styrbart!}$$

Exempel 3b — Pumpning till övre tanken

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = ax_1 - ax_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$W_s = \begin{bmatrix} b & -ab \\ 0 & ab \end{bmatrix} \qquad \text{Styrbart!}$$

Exempel 3c — Pumpning till parallella tankar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = -ax_2 + bu \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} u$$

$$W_s = \begin{bmatrix} b & -ab \\ b & -ab \end{bmatrix} \qquad \text{Ej styrbart!}$$

Styrbar form

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} x$$

$$W_s = \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Styrbart!}$$

Tillståndsåterkoppling i styrbar kanonisk form

$$A - BL = \begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & -a_2 - l_2 & \dots & -a_{n-1} - l_{n-1} & -a_n - l_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nytt karaktäristiskt polynom

$$s^n + \underbrace{(a_1 + l_1)}\, s^{n-1} + \underbrace{(a_2 + l_2)}\, s^{n-2} + \cdots + \underbrace{(a_n + l_n)}$$

Fördel: **Enkelt att se hur man ska välja** $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{bmatrix}$ för att **ändra från ursprungligt karaktäristiskt polynom till önskat**!

Integraldel i regulatorn

En begränsning med vanlig tillståndsåterkoppling är att den **saknar integraldel**, vilket resulterar i **risk för stationära reglerfel**.

Introducera ett **extra tillstånd** x_i som integralen av reglerfelet.

$$x_i = \int (r - y)dt \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_i = r - y = r - Cx$$

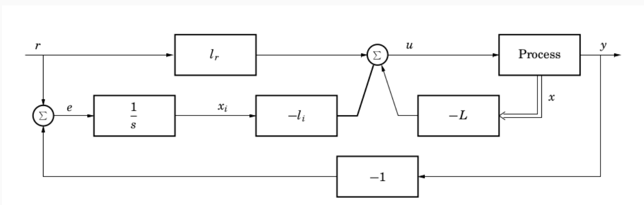


Figure 2: Introducera **extra tillstånd** x_i för tillståndsreglering med integraldel.

Om vi **utökar** tillståndsvektorn x med integraltillståndet x_i så att

$$x_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \\ \mathbf{x_i} \end{bmatrix}$$

kan det utökade system skrivas

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r = A_e x_e + B_e u + B_r r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} x_e = C_e x_e$$

Vi har därmed fått en regulator med integraldel. I stationäritet gäller att $\dot{x}_e = 0$ och därmed $\dot{x}_i = r - y = 0$.

Tillståndsåterkoppling med integraldel (forts)

Regulatorn bli nu

$$u = l_r r - Lx - l_i x_i = l_r r - L_e x_e$$

där

$$L_e = \begin{bmatrix} L & l_i \end{bmatrix}$$

Detta ger det återkopplade (slutna) systemet som

$$\dot{x}_e = (A_e - B_e L_e) x_e + (B_e l_r + B_r) r$$

$$y = C_e x_e$$

Parametrarna i **vektorn L_e väljs som**[1] så att vi får det önskade closed-loop pole placement, just as previously. Polernas placering ges av det karaktäristiskt polynomet

$$\det(sI - (A_e - B_e L_e))$$

[1] INTE samma värde för L med resp utan integraldel!

Anm: Vi behöver inte längre parametern l_r för att uppnå $y = r$ i stationäritet.

Parametern påverkar inte polerna till det slutna systemet, men dess nollställen. Nollställen påverkar det transienta svaret properties at setpoint changes.

Vi kommer att återkomma till inverkan av nollställen senare i kursen.

F08 – Sammanfattning

1. Styrbar form
2. Tillståndsterkoppling
3. Exampel
4. Styrbarhet
5. Integraldel i regulator

Nästa föreläsning

- Observerbarhet
- Tillståndsskattning
- Utsignalåterkoppling
- Pol-nollställesförkortning (Varning!)