Föreläsning 7:

Känslighetsfunktionen och Stationära fel

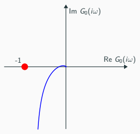
4 Februari, 2019

Föreläsning 7

1. Stabilitetsmarginaler
2. Standardkretsen
3. Känslighetsfunktion

Förra veckan

Nyquistkriteriet



Nyquistkriteriet (förenklad version):
Antag att $G_0(s)$ är stabil.
Då är även slutna systemet också stabil (under enkel återkoppling) om punkten $(-1+0i)$ ligger till vänster om $G(i\omega)$ när ω går från 0 till ∞ (dvs omcirklar ej $(-1+0i)$-punkten).
OBS! Genom att **analysera öppna systemets överföringsfunktion**

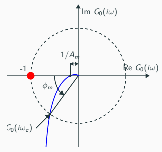
$$L = G_o = G_R G_p$$

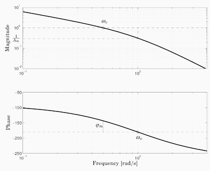
drar vi slutsatser om **slutna systemets stabilitet**

$$\mathbf{G_{cl}} = \frac{L}{1+L} = \frac{G_o}{1+G_o}$$

Vi ritar alltså nästan alltid Bode- och Nyquist-diagram

Amplitud- och fasmarginal





ω_c kallas skärfrekvens.

Amplitudmarginal: "max förstärkningsändring utan instabilitet"

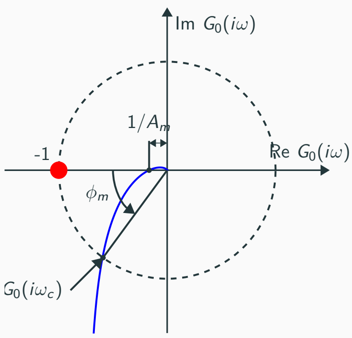
Stabilitet är viktigt!

Stabilitetsmarginaler är också viktigt!

X29

Stabilitetsmarginaler

Stabilitetsmarginaler



Amplitudmarginal: "möjlig förstärkningsändring utan instabilitet"

Fasmarginal: "möjlig fasförlust utan instabilitet" Viktigt med tillräckliga stabilitetsmarginaler för bra reglerprestanda

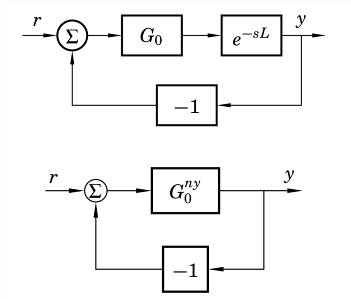
Extra fördröjning i loopen?

Reaktionstid:
Hur påverkas stabilitet om man inför extra fördröjning i återkopplingen?

Dödtidsmarginal/fördröjningsmarginal

Dödtidsmarginalen talar om hur lång dödtid L som kan adderas till reglerkretsen utan att den blir instabil.

Antag att vi har en kretsöverföringsfunktion $G_0(s)$ och att vi kompletterar denna med överföringsfunktionen för en dödtid, e^{-sL}.



7

Dödtidsmarginal/fördröjningsmarginal

Den nya kretsöverföringsfunktionen blir då

$$G_0^{ny}(s) = e^{-sL}G_0(s)$$

där L är dödtiden. Förstärkningen och fasvridningen för den nya kretsöverföringsfunktionen ges av

$$|G_0^{ny}(i\omega)| = |G_0(i\omega)|$$

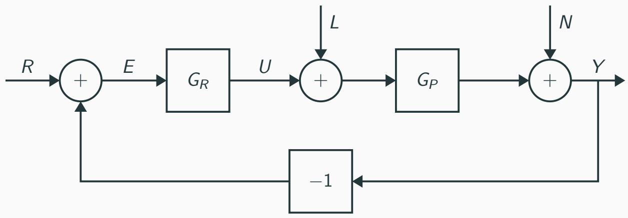
$$\arg G_0^{ny}(i\omega) = \arg G_0(i\omega) - \omega L$$

Förstärkningen påverkas alltså inte av dödtiden, medan fasvridningen minskar. Antag att den ursprungliga kretsöverföringsfunktionen G_0 har skärfrekvensen ω_c, det vill säga $|G_0(i\omega_c)| = 1$, med motsvarande fasmarginal φ_m. Eftersom G_0^{ny} har samma förstärkning som G_0 kommer G_0^{ny} också att ha skärfrekvensen ω_c. Fasmarginalen kommer däremot att minska eftersom fasvridningen har minskat. Den nya fasmarginalen blir

8

Standardkretsen

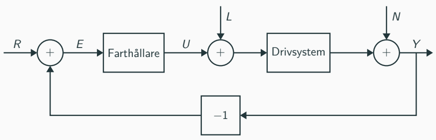
Standardkretsen



- Reducera inverkan av laststörning L
- Reducera inverkan av mätbrus N
- Liten känslighet för variationer i processen
- Följa variationer i R

9

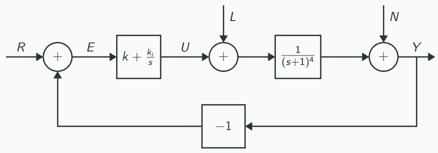
Farthållare i bil



- R anges av föraren
- L inverkan från vägens lutning
- N mätfel
- Y hastighetsmätning

10

Att bedöma en reglerkrets — Ett exempel

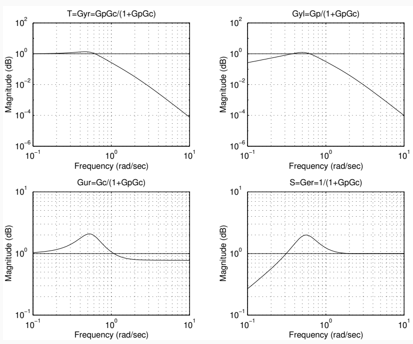


$k = 0.7551$ $\qquad$ $k_i = 0.3779$

Viktigt att titta på **4** överföringsfunktioner! ("Gang of four")

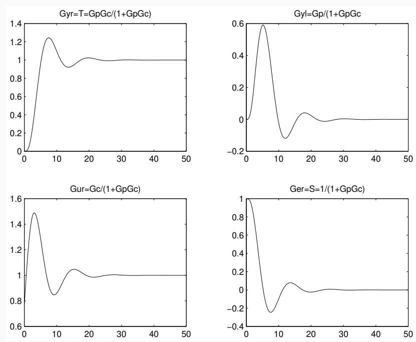
11

Amplitudkurvor för den enkla reglerkretsen



12

Stegsvar för den enkla reglerkretsen



13

Var ligger de dominerande polerna?

Låt polerna (egenvärdena) till systemet $\dot{x} = Ax$ vara $p_1, \dots, p_n$.

Låt $v_1, \dots, v_n$ vara motsvarande egenvektorer.

Då har lösningarna formen

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{p_n t} v_n$$

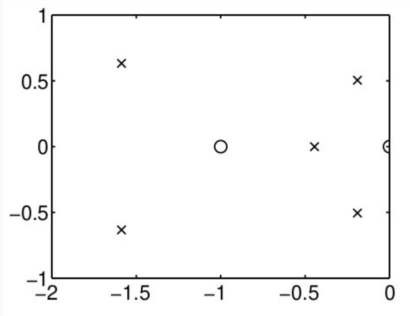
En pol i $-b + ia$ motsvaras av en transient av formen

$$e^{-bt} \sin at$$

Från stegsvaren uppskattar vi

$$b \approx 0.2 \qquad\qquad a \approx 0.5$$

Singularitetsdiagram för $(1 + G_R G_p)^{-1}$



Känslighetsfunktion

Känslighetsfunktionen

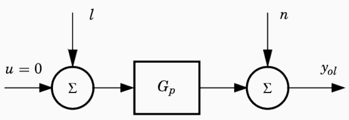
Överföringsfunktionen (sluten loop)

$$G_S(s) = S(s) = \frac{1}{1 + G_R(s) G_P(s)}$$

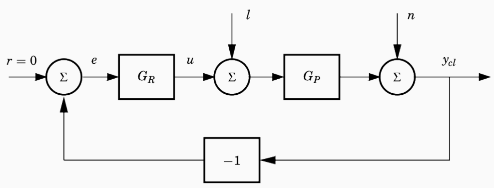
kallas **känslighetsfunktionen**.

Den ger mycket information om slutna systemets reglerprestanda.

Tolkning av känslighetsfunktionen (1/3)



$Y_{ol}(s) = \dots L(s) + \dots N(s) Y_{cl}(s) = G_P(s) L(s) + 1 \cdot N(s)$



$Y_{cl}(s) = \dots L(s) + \dots N(s) Y_{cl}(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s) G_P(s)} L(s) + \frac{1}{1 + G_R(s) G_P\dots}$

Tolkning av känslighetsfunktionen (1/3)

$$Y_{ol}(s) = G_P(s) L(s) + 1 \cdot N(s)$$

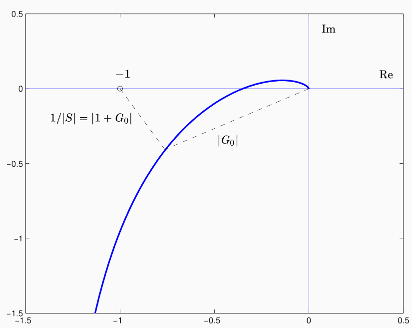
$$Y_{cl}(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s) G_P(s)} L(s) + \frac{1}{1 + G_R(s) G_P(s)} N(s)$$

Känslighetsfunktionen ger ett mått på inverkan av återkoppling.

$|S(i\omega)| < 1 \Rightarrow$ störningar med frekvens ω reduceras av regulatorn
$|S(i\omega)| > 1 \Rightarrow$ störningar med frekvens ω förstärks av regulatorn

Trade-off: Regulatorn kommar alltid förstärka störningar i något frekvensområde så viktigt att designa utifrån detta.

Tolkning av känslighetsfunktionen (2/3)



$1/|S(i\omega)|$ är avståndet mellan Nyquist kurvan och punkten $-1 + 0i$.

$M_s = \sup_\omega |S(i\omega)|$ kan användas för att ge ett mått på

Tolkning av känslighetsfunktionen (3/3)

Känslighetsfunktionen ger även ett mått på slutna loopens känslighet mot modellfel. Anta att G_P är en modell för vår process.

$$G_P^0 = G_P(1 + \Delta G)$$

G_P^0 motsvarar den riktiga dynamiken, ΔG är relativa modelleringsfelet.

Man kan visa att

$$Y^0 = \left(1 + S^0 \Delta G\right) Y$$

S^0 is känslighetsfunktionen för det *riktiga* systemet.

$$\frac{Y^0 - Y}{Y} = S^0 \Delta G$$

Speciella överföringsfunktioner

Kretsöverföringfunktionen

$$G_o = G_p G_R$$

Känslighetsfunktionen

$$G_s = S = 1/(1 + G_o)$$

Komplementära känslighetsfunktionen

$$G_t = T = G_o/(1 + G_o)$$

Känslighetsfunktionen $G_s = 1/(1 + G_o)$

Visar hur relativa felet i G_p påverkar relativa felet i G_t:

$$\frac{d \log G_t}{d \log G_p} = G_s$$

Härledning

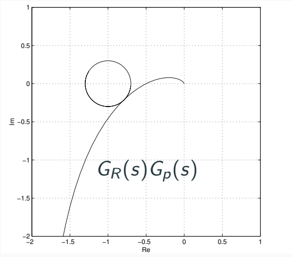
$$G_t = \frac{G_p G_R}{1 + G_p G_R}$$

$$\log G_t = \log G_p G_R - \log (1 + G_p G_R)$$

$$\frac{dG_t}{G_t} = \frac{dG_p}{G_p} - \frac{G_R dG_p}{1 + G_p G_R} = \frac{1}{1 + G_p G_R} \frac{dG_p}{G_p}$$

$$d \log G_t = G_s \cdot d \log G_p$$

Känslighetsfunktionen mäter avståndet till kritiska punkten



Stabilitetsvillkor

$$|G_R \Delta G_p| < |1 + G_R G_p|$$
$$|G_R \Delta G_p| \cdot |G_s| < 1$$

En annan tolkning

Stabilitetsvillkoret

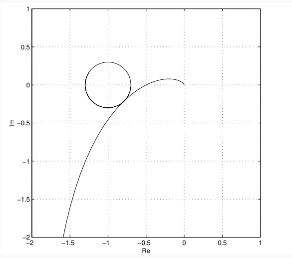
$$|G_R \Delta G_p| \cdot |G_s| < 1$$

kan även skrivas

$$|\Delta G_p| < \frac{|G_p|}{|G_t|}$$

Stora variationer i processen kan tillåtas vid de frekvenser där det slutna systemet G_t har mindre förstärkning än det öppna systemet G_p.

Maximal känslighet $M_s = \max |G_s(i\omega)|$ ett mått på reglerkvalitet



Rimliga krav är $M_s < 2$ eller $M_s < \sqrt{2}$.

Regulatorproblemet — reglera bort laststörningar

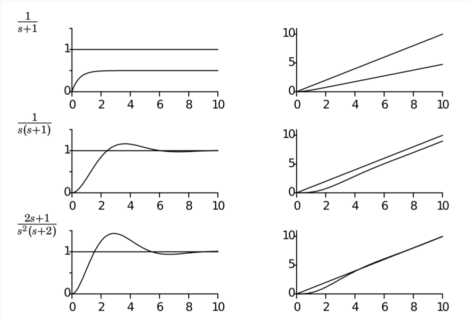
$$Y = \frac{G_p G_R}{1 + G_p G_R} R + \frac{G_p}{1 + G_p G_R} L + \frac{1}{1 + G_p G_R} N$$

$$\frac{G_p G_R}{1 + G_p G_R} \approx 1 \qquad \text{i relevant frekvensområde}$$

$$\frac{G_p}{1 + G_p G_R} \approx 0 \qquad \text{i relevant frekvensområde}$$

Simulering av slutet system för olika kretsförstärkningar G_o

stegsvar rampsvar



Slutvärdessatsen

Låt $G(s)$ vara en rationell funktion där alla poler till $sG(s)$ har negativ realdel. Låt $g(t)$ vara motsvarande impulssvar. Då gäller

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

Begynnelsevärdessatsen

Låt $G(s)$ vara en rationell funktion med högre gradtal i nämnaren än i täljaren. Låt $g(t)$ vara motsvarande impulssvar. Då gäller

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s)$$

29

Reglerfel vid steg i referenssignalen

Låt $\quad e(t) = r(t) - y(t) \quad$ där $\quad r(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G_R(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G_R(s)}\cdot\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_p(s)G_R(s)} \end{aligned}$$

30

Reglerfel vid ramp i referenssignalen

Låt $\quad e(t) = r(t) - y(t) \quad$ där $\quad r(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G_R(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_p(s)G_R(s)}\cdot\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s^{-1}}{1+G_p(s)G_R(s)} \end{aligned}$$

31

Fel vid ramp

$$G_R(s) = K \qquad\qquad G_p(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{s(1+sT)}} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{-1}}{1+\frac{K}{s(1+sT)}} = \frac{1}{K}$$

32

Regulatorproblemet

$$Y(s) = \frac{G_p}{1+G_pG_R}L(s)$$

Exempel 1 $G_R = k/s,\ G_p = 1/(s+1)$

Vi finner

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+1)+k} = 0$$

Exempel 2 $G_R = k,\ G_p = 1/s(s+1)$

Vi finner

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(s+1)+k} = \frac{1}{k}$$

Det är alltså **viktigt var integratorn sitter**.

33

Resonera intuitivt!

Hög förstärkning före den punkt där störningen kommer in!

Vad menar vi med förstärkning?

Vad är förstärkningen hos en integrator vid låga frekvenser?

34

Sammanfattning

1. Standardkretsen
   - Referenssignal
   - Laststörning
   - Mätbrus
   - Robusthet
2. De viktiga överföringsfunktionerna
   - Kretsöverföringsfunktionen $G_0 = G_pG_R$
   - Känslighetsfunktionnen $1/(1+G_pG_R)$
   - Komplementära känslighetsfunktionen $G_o/(1+G_o)$
3. Långsamma signaler
   - Rollen av integratorer och deras placering

35

Nästa föreläsning, F8

- Tillståndsåterkoppling
- Styrbarhet
- Integraldel i regulator

36