LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 25 oktober 2021 kl 14–19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Ett system är givet på tillståndsform som

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

a. Beräkna systemets överföringsfunktion. (1,0 p)

b. Ange systemets poler och nollställen (om de finns). (0,5 p)

c. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? (0,5 p)

d. Beskriv systemet med en differentialekvation. (1,0 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{(s+1)^2} = \frac{4}{s^2 + 2s + 1}.$$

b. Systemet har två poler i $s = -1$, men inga nollställen.

c. Eftersom båda polerna har negativ realdel så är systemet **asymptotiskt stabilt**.

d. Från överföringsfunktionen får vi

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 1} U(s) \quad \Rightarrow \quad s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = 4U(s).$$

Invers Laplacetransformering ger då

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 4u(t).$$

2. Ett system beskrivs av följande differentialekvation:

$$\ddot{y} + \dot{y}^2 + \frac{1}{y+1} = u$$

a. Inför tillståndsvariablerna $x_1 = y$ samt $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1,0 p)

b. Bestäm alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) för systemet. (0,5 p)

c. Linjärisera systemet kring den stationära punkt för vilken $u^0 = 1$. (1,5 p)

Solution

a.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= -x_2^2 - \frac{1}{x_1+1} + u = f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

b. $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$ ger $x_2^0 = 0$ samt $x_1^0 = \frac{1}{u^0} - 1$.

c. Partiella derivator:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2x_2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$$

Inför variabelbytet $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$ och $\Delta u = u - u^0$.
Insättning av $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $u = 1$ ger:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= \Delta x_1 + \Delta u\end{aligned}$$

3. Vi har en process

$$G_P(s) = \frac{1}{s+2}$$

med styrsignal $u(t)$ och mätsignal $y(t)$ som vi vill reglera med en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$, där $r(t)$ är vår referenssignal.

a. Bestäm regulatorparametern K så att det slutna systemet (från $r(t)$ till $y(t)$) får polpolynomet $(s+4)$. (1,0 p)

b. Beräkna det stationära värdet på $y(t)$, d.v.s. $y(t)$ när $t \to \infty$, ifall referenssignalen $r(t)$ är ett enhetssteg. (1,0 p)

c. Vad blir utsignalen $y(t)$ ifall referenssignalen är $r(t) = \sin(3t)$? (1,0 p)

d. Vi vill att det stationära värdet på $y(t)$ ska bli lika med $r(t)$, när referenssignalen är konstant. Föreslå en regulatortyp som uppnår detta, och beskriv vilken egenskap hos regulatorn som möjliggör detta. (1,0 p)

Solution

a. Vi har $Y(s) = G_p(s)U(s)$ och $U(s) = K(R(s) - Y(s))$. Då vi sätter in den andra ekvationen i den första och löser ut $Y(s)$ så får vi det slutna systemet

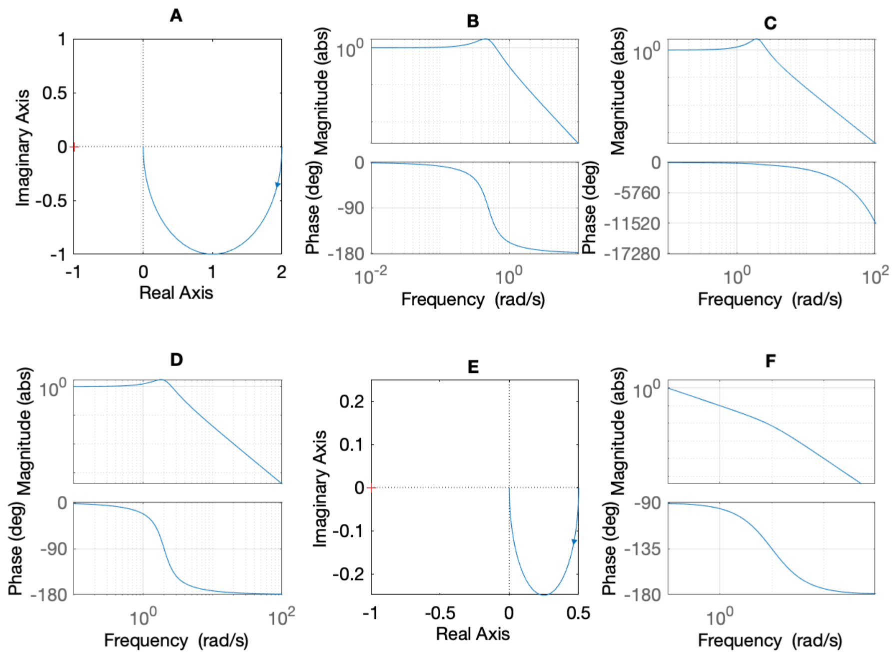
$$Y(s) = \frac{K}{s+2+K} R(s).$$

Det önskade polpolynomet erhålls genom att välja $K = 2$.

b. Att referenssignalen är ett enhetssteg innebär att $R(s) = 1/s$. Slutvärdessatsen ger då

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2}{s+4}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s+4} = \frac{1}{2}.$$

Resultatet är giltigt, eftersom $2/(s+4)$ är ett stabilt system.



Figur 1 Bode-/Nyquistdiagram till uppgift 4.

c. För linjära tidsinvarianta system gäller det i allmänhet att ifall insignalen är en sinussignal $u(t) = \sin(\omega t)$, så blir utsignalen $y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega))$, d.v.s. en sinussignal med samma frekvens, men med en annan amplitud och en fasförskjutning, som avgörs av överföringsfunktionen. I vårt fall är insignalen till det slutna systemet $r(t) = \sin(3t)$, och det har överföringsfunktionen $G(s) = 2/(s+4)$. Vi får $|G(i\omega)| = 2/(\sqrt{\omega^2 + 16})$ och $\arg G(i\omega) = -\arctan(\omega/4)$, vilket för $\omega = 3$ ger $|G(i\omega)| = 2/5$ och $\arg G(i\omega) = -\arctan(3/4)$. Vi får alltså $y(t) = \frac{2}{5}\sin(3t - \arctan(3/4)) \approx \frac{2}{5}\sin(3t - 0.64)$.

d. Det stationära felet blir noll då referensvärdet hålls konstant ifall vi använder t.ex. en PI-regulator. Detta beror på att regulatorn har integralverkan, d.v.s. att dess överföringsfunktion har en pol $s = 0$.

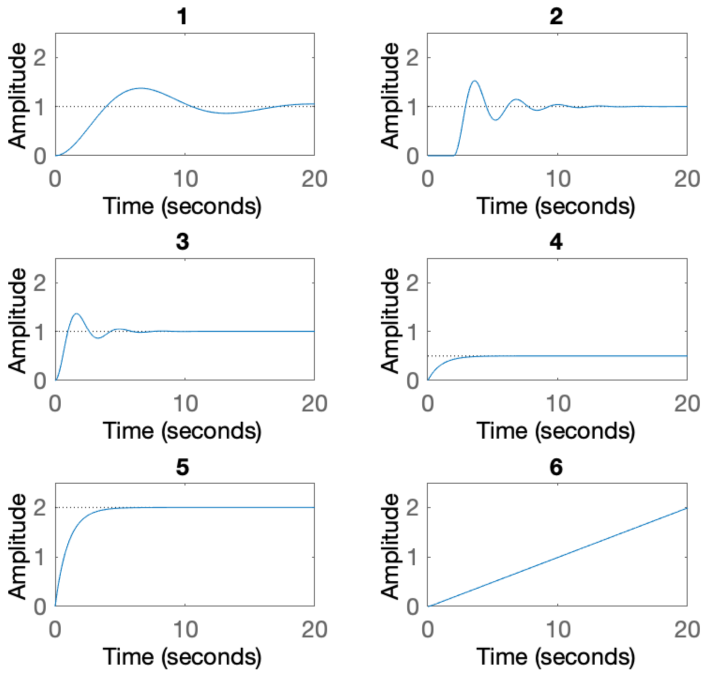
4. Betrakta följande fyra system:

$$G_\alpha(s) = \frac{1}{2s+2}, \quad G_\beta(s) = \frac{1}{s^2 + 10s},$$
$$G_\gamma(s) = \frac{0.25}{s^2 + 0.3s + 0.25}, \quad G_\delta(s) = \frac{4}{s^2 + 1.2s + 4}.$$

a. Ange vilket av Bode- eller Nyquistdiagrammen A-F i figur 1 som tillhör var och en av de fyra överföringsfunktionerna (för varje överföringsfunktion finns antingen ett Bode- eller ett Nyquistdiagram). Motivera dina svar. (2,0 p)

b. Ange vilket av stegsvaren 1-6 i figur 2 som tillhör var och en av de fyra överföringsfunktionerna. Motivera dina svar. (2,0 p)

Solution



Figur 2 Stegsvar till uppgift 4.

a. $G_\alpha(s)$ är ett första ordningens system utan dödtid, vilket innebär att faskurvan inte kan gå lägre än till $-90°$. Alla Bodediagrammen kan därmed uteslutas. Systemets statiska förstärkning $|G_\alpha(0)| = 1/2$ är startpunkten för Nyquistkurvan, så vi ser att systemet motsvarar E. Vi har alltså $G_\alpha(s) \leftrightarrow$ **E**.

$G_\beta(s)$ har en pol i $s = 0$, och innehåller därmed en integrator. Detta innebär att förstärkningen går mot oändligheten när $\omega \to 0$. Nyquistkurvorna går aldrig mot oändligheten, och kan därmed uteslutas. I Bodediagram syns detta som att förstärkningskurvans lutning är -1 vid låga frekvenser, vilket är fallet endast för F. Vi har alltså $G_\beta(s) \leftrightarrow$ **F**.

$G_\gamma(s)$ och $G_\delta(s)$ har båda statisk förstärkning 1, så Nyquistdiagrammen kan uteslutas. Dessa är andra ordningens system med komplexkonjugerade poler, där polpolynomen kan skrivas som $(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)$, där ω avgör systemets snabbhet och ζ avgör dess dämpning. Vi ser att dämpningen $\zeta = 0.3$ är samma för båda, medan $\omega_\gamma = 0.5$ och $\omega_\delta = 2$. När dämpningen är låg så får förstärkningskurvan i Bodediagrammet en resonanstopp i närheten av frekvensen ω. $G_\gamma(s)$ ska alltså ha en resonanstopp i närheten av 0.5 och $G_\delta(s)$ i närheten av 2. Vi kan utesluta C, eftersom fasen går ner lägre än till $-180°$, vilket inte kan hända för ett andra ordningens system utan dödtid. Då får vi $G_\gamma(s) \leftrightarrow$ **B** och $G_\delta(s) \leftrightarrow$ **D**.

b. Systemet $G_\alpha(s)$ är ett stabilt första ordningens system med statisk förstärkning 1/2. Detta innebär (enligt slutvärdessatsen) att stegsvaret går mot 1/2 när $t \to \infty$. Vi måste alltså ha $G_\alpha(s) \leftrightarrow$ **4**.

$G_\beta(s)$ innehåller en integrator, vilket innebär att insignalen integreras, så att utsignalen fortsätter att växa så länge $u(t) > 0$. Därmed måste vi ha $G_\beta(s) \leftrightarrow$ **6**.

Eftersom $G_\gamma(s)$ och G_δ är resonanta system (vilket vi ser på resonanstoppen i Bodediagrammet, eller på att de har låg dämpning ζ) bör vi se svängningar i stegsvaren. Stegsvaren är alltså 1, 2 eller 3. Vi noterar att stegsvaret 2 har en dödtid, vilket ingen av överföringsfunktionerna har, så detta kan uteslutas. 3 svänger snabbare än 1, och måste därmed ha en större resonansfrekvens. Vi måste alltså ha $G_\gamma(s) \leftrightarrow$ **1** och $G_\delta(s) \leftrightarrow$ **3**.

5. Ett system är givet på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}}_{B} u \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} x \end{aligned}$$

a. Vad innebär det att ett system är styrbart? (0,5 p)

b. För vilka värden på β är systemet inte styrbart? (1,0 p)

c. Låt $\beta = 1$. Antag att du återkopplar systemet med styrlagen

$$u = -Lx$$

där $L = (l_1 \quad l_2)$. Bestäm L så att det återkopplade systemets poler placeras i -5. (1,0 p)

d. Antag att du återkopplar systemet med styrlagen

$$u = -L\hat{x}$$

med samma L som ovan. Vektorn $\hat{x}$ skattas med Kalmanfiltret

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\,\hat{x} + Bu + Ky$$

där $K = (k_1 \quad k_2)^\top$. Bestäm K så att Kalmanfiltret är dubbelt så snabbt som tillståndsåterkopplingen. (1,0 p)

e. Ge en anledning varför Kalmanfiltret inte bör vara för långsamt. (0,5 p)

f. Ge en anledning varför Kalmanfiltret inte bör vara för snabbt. (0,5 p)

Solution

a. Definition från föreläsningsanteckningar: En tillståndsvektor x_0 är styrbar om det finns en styrsignal som överför tillståndsvektorn x från origo till x_0 på ändlig tid. Ett system är styrbart om samtliga tillstånd är styrbara.

b. $\beta = 2$ eller $\beta = 0$ via styrbarhetsmatrisen:

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta - 5 \\ \beta & -3\beta \end{vmatrix} = 2\beta - \beta^2$$

c.

$$|\lambda I - (A - BL)| = \begin{vmatrix} \lambda + 5 + l_1 & -1 + l_2 \\ l_1 & \lambda + 3 + l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (8 + l_1 + l_2)\lambda + 15 + 4l_1 + 5l_2$$

ger $L = (0 \quad 2)$.

d.

$$|\lambda I - (A - KC)| = \begin{vmatrix} \lambda + 5 + k_1 & -1 \\ k_2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (8 + k_1)\lambda + 15 + 3k_1 + k_2$$

ger $k_1 = 12$ och $k_2 = 49$.

e. Ett långsamt Kalmanfilter gör att rekonstruktionsfelet konvergerar långsamt. De skattade tillstånden, som återkopplas, kan då skilja sig betydligt från riktiga tillstånden, vilket kan påverka tillståndåterkopplingens prestanda och robusthet.

f. Ett snabbt Kalmanfilter innebär att de skattade tillstånden blir mer känsliga för mätbrus.

6. Bodediagrammet för en linjär, tidsinvariant process $G_P(s)$ är givet i Figur 3.

a. Har processen en integralverkan? Motivera ditt svar. (0,5 p)

b. Beräkna processens amplitudmarginal, fasmarginal samt dödtidsmarginal. (1,5 p)

c. Vad blir utsignalen från systemet (efter att transienten har dött ut) då insignalen är $\sin(0.01t)$? (1,0 p)

d. Använd Ziegler-Nichols frekvensmetod för att bestämma parametrarna i en PI-regulator. (1,0 p)

e. Istället för att använda PI-regulatorn, halvera det stationära felet som uppstår när referensvärdet r är ett enhetssteg genom att använda en fasretarderande länk

$$G_K(s) = \frac{s + a}{s + a/M}.$$

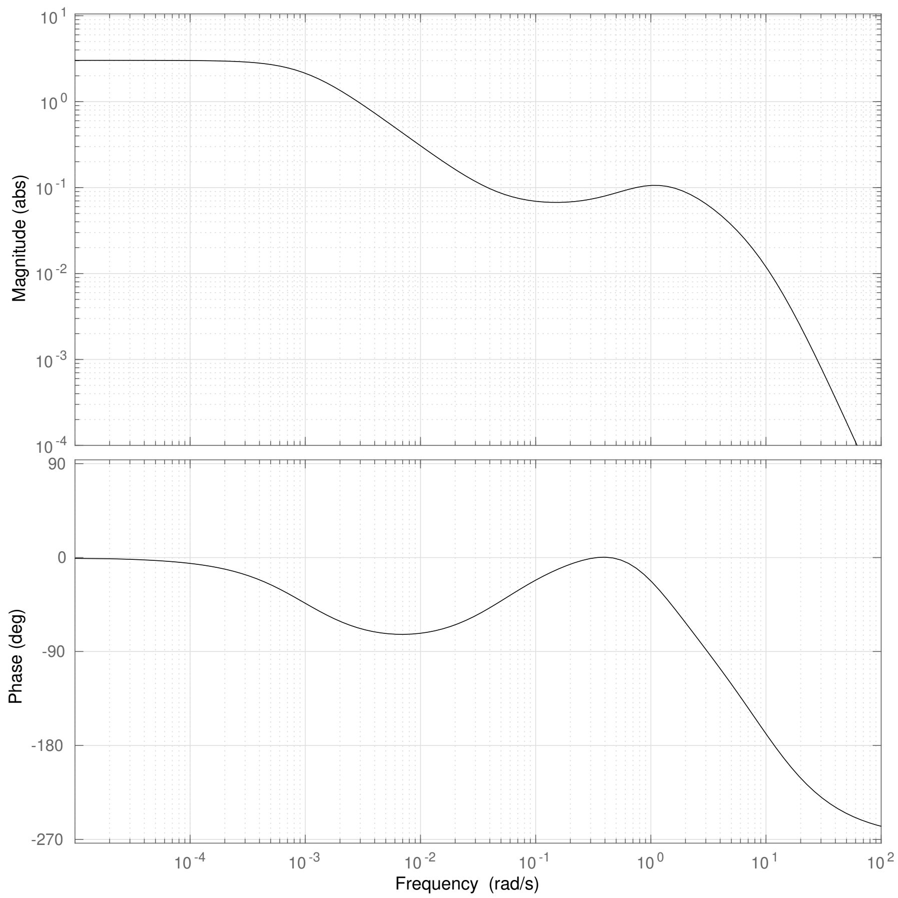
Fasmarginalen får minska med högst 6°. (2,0 p)

f. Låt $M \to \infty$ för den fasretarderande länken. Vilken typ av regulator motsvarar detta? (0,5 p)

Solution

Som referens, processens överföringsfunktion ges av

$$\frac{24,2(s + 0,5)^2(s + 0,05)}{(s + 10)^2(s + 1)^3(s + 0.001)}.$$



Figur 3 Bodediagram till uppgift 6.

a. Nej, lutningen för låga frekvenser är 0 och fasen är 0°.

b. Läs ut som vanligt från Bodediagrammet. Amplitudmarginal=118, fasmarginal=113°, dödtidsmarginal=688 s.

c. Läs ut förstärkningen och fasen från Bodediagrammet. Förstärkning=0.3, fas=-73°=-1,3 rad. Frekvenssvaret blir därmed $0,3\sin(0,01t - 1,3)$.

d. För att systemet ska självsvänga ska förstärkningen $K_0 = 118$ (amplitudmarginalen). Systemet kommer självsvänga med vinkelfrekvensen $\omega_0 = 12$ rad/s, vilket ger periodtiden $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,53$ s.

Ziegler-Nichols frekvensmetod ger således att $K = 53$ och $T_i = 0,44$ s.

e. Felet ges av $e(t) = r(t) - y(t)$. Laplacetransform ger $E(s) = R(s) - Y(s) = \left(1 - \frac{G_P(s)G_K(s)}{1+G_P(s)G_K(s)}\right) R(s) = \frac{1}{1+G_P(s)G_K(s)} R(s)$ (överföringsfunktionen är alltså systemets känslighetsfunktion). För en fasretarderande länk är $G_K(0) = M$ och processen är begränsad $G_P(0) = 3$.

Slutvärdesteoremet ger stationära felet: $\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G_P(s)G_K(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+3M}$. Utan fasretarderande länk är $M = 1$, för att halvera stationära felet

måste alltså $\frac{1}{2}\frac{1}{1+3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{1+3M}$ vilket ger $M = \frac{7}{3}$.
För att inte fasmarginalen ska minska mer än 6° så välj $a = 0.1\omega_c = 0.0003$.

f. Det blir en PI-regulator.