

Reglerteknik AK

Tentamen 9 januari 2019 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 2016-10-24

1. En process beskrivs av följande tillståndsmodell

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 1] x$$

- a. Bestäm överföringsfunktionen för processen. (1 p)
- b. Bestäm processens poler och nollställen. (1 p)
- c. Vad händer med överföringsfunktionen när $a = b$? Kan man förenkla tillståndsmodellen i det fallet? Gör i så fall det. (2 p)

Solution

a.

$$G(s) = \frac{2s + (a + b)}{(s + a)(s + b)}$$

- b. Poler ges av $p = -a$ och $p = -b$. Nollställen ges av $z = -\frac{a+b}{2}$.
- c. Nollstället förkortar bort en pol och överföringsfunktionen går från att vara av andra ordningen till första.

$$G(s) = \frac{2}{s + a}$$

Det betyder att även tillståndsmodellen skulle kunna beskrivas som ett första ordningens system (om vi bara är intresserad av input-output relationen).

$$\dot{x} = -ax + 2u$$
$$y = x$$

2. Ge exempel med motiveringar på andra ordningens överföringsfunktioner som saknar nollställen och:
- a. Är stabil men inte asymptotisk stabil. (1 p)
- b. Har en instabil pol och en stabil pol. (1 p)
- c. Har större relativ dämpning än överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{(s+1-i)(s+1+i)}$. (1 p)
- d. Har en amplitudmarginal större än 1. (1 p)

Solution

Till exempel:

- a. $\frac{1}{(s-i)(s+i)} = \frac{1}{s^2+1}$, enkla poler på imaginära axeln.
- b. $\frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s^2-1}$
- c. $\frac{1}{(s+1)^2}$, mindre vinkel till reella axeln än 45° .
- d. $\frac{1}{(s+1)^2}$, fasen är aldrig mindre än -180° för någon stabil andra ordningens överföringsfunktion.

3. Studera följande system på tillståndsform:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t) + 2 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1^3(t) + 5x_2(t) - x_3(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_3(t) + u^2(t). \end{aligned}$$

- a. Bestäm huruvida systemet är linjärt eller inte. Motivera svaret genom att lista alla icke-linjäriteter. (1 p)
- b. Hitta det stationära tillståndet (x_1^0, x_2^0, x_3^0) för en godtycklig konstant insignal $u(t) = \bar{u}$. (1 p)
- c. Linjärisera systemet runt det generella stationära tillståndet (x_1^0, x_2^0, x_3^0) . Du behöver inte sätta in punkterna som hittades i föregående uppgift, ett linjäriserat system parametriserat av x^0 är tillräckligt. (2 p)
- d. Bestäm huruvida systemet är asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt kring det stationära tillståndet givet av $u(t) = \bar{u} = 2$. (1 p)

Solution

- a. The system is not linear because (i) two state variables are multiplied between each other in f_1 , (ii) x_1 appears with the cube in f_3 and (iii) u appears with the square in g .
- b. Stationary points are:

$$(x_1^0 = \bar{u}, x_2^0 = \frac{2}{3\bar{u} - 3}, x_3^0 = -\bar{u}^3 + \frac{10}{3\bar{u} - 3}). \quad (1)$$

- c. The matrices of the linearized system are:

$$A = \begin{bmatrix} -3x_2^0 & -3x_1^0 + 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3(x_1^0)^2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 1], D = [2\bar{u}]. \quad (2)$$

- d. The stationary point for $\bar{u} = 2$ is:

$$(x_1^0 = 2, x_2^0 = \frac{2}{3}, x_3^0 = -8 + \frac{10}{3}). \quad (3)$$

The corresponding dynamics matrix is:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -12 & 5 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

The matrix has the following characteristic polynomial (compute the determinant of $(sI - A)$ on the last column):

$$\det(sI - A) = (s + 1)(s^2 + 2s - 3) = (s + 1)(s + 3)(s - 1) \quad (5)$$

One of the roots of this polynomial have positive real part, hence the system is unstable.

4. Varje stegsvar i Figur 1 är utsignal från någon av överföringsfunktionerna nedan. Para ihop stegsvaren med respektive överföringsfunktion. Svaren ska motiveras. (3 p)

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{s + 1} & G_2(s) &= \frac{3}{s + 3}e^{-s} \\ G_3(s) &= \frac{s + 2}{s^2 + s + 2} & G_4(s) &= \frac{3}{s - 3} \\ G_5(s) &= \frac{-s + 2}{s^2 + 2s + 2} & G_6(s) &= \frac{5}{s} \\ G_7(s) &= \frac{3}{s + 3} & G_8(s) &= \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned}$$

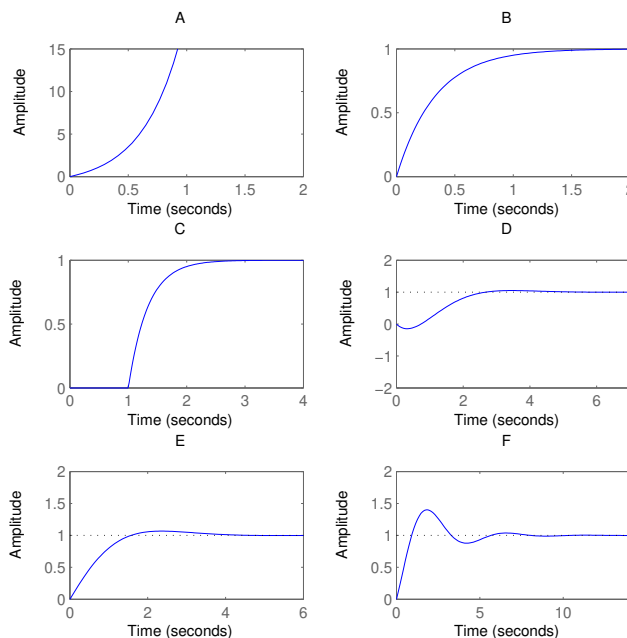


Figure 1: Stegsvvar till Problem 4.

Solution

C har en tidsfördröjning och den enda överföringsfunktionen som innehåller fördröjning är G_2 .

A är instabil och både G_4 och G_6 kan stämma in på det. Men då vi ser att svaret växer exponentiellt snarare än linjärt är det G_4 som måste vara svaret.

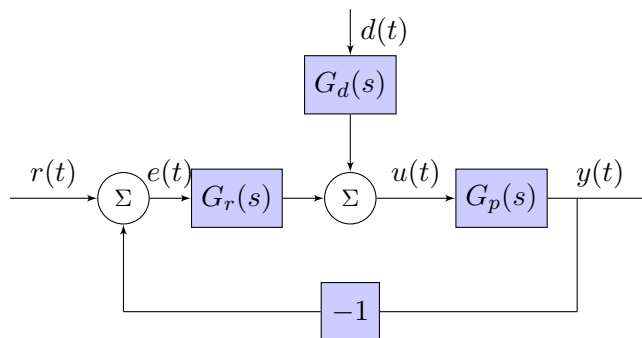
B är en enkapacitiv process med statisk förstärkning 1 och tidskonstant på lite under 0.5 vilket stämmer väl med G_7 som har tidskonstant på $1/3$.

D och E är båda relativt dämpade processer men D börjar åt fel håll. Detta stämmer med G_5 och G_8 där G_5 har ett instabilt nollställe vilket ger en start åt fel håll.

F är en rätt odämpad process vilket stämmer med G_3 .

- A- G_4
- B- G_7
- C- G_2
- D- G_5
- E- G_8
- F- G_3

5. Studera blockdiagrammet i Figur 2, där insignalerna består av referenssignalen $r(t)$ och störsignalen $d(t)$.



Figur 2

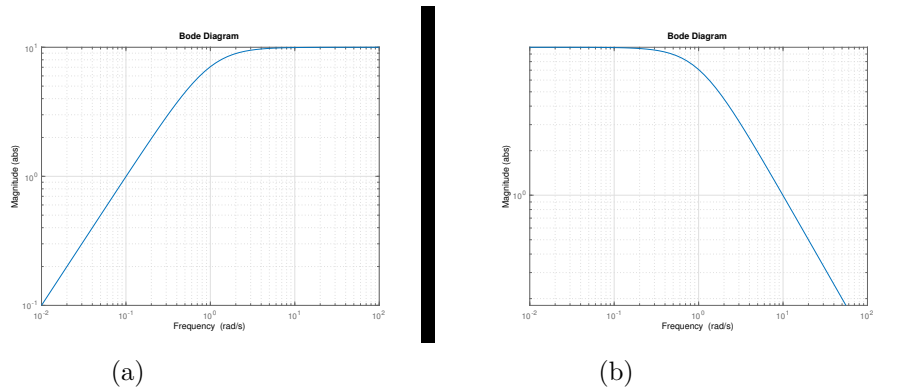
- a. Vad är överföringsfunktionen från störsignalen $d(t)$ till felet $e(t)$? (1 p)
- b. Om vi antar att störsignalen $d(t)$ huvudsakligen består av lägre frekvenser (exempelvis runt $\omega_{disturbance} = 0.06 [rad/s]$), vilket av bodediagrammen från Figur 3 skulle vara bäst som bodediagram för $G_d(s)$? Motivera ditt svar. (1 p)

Solution

- a.

$$G(s) = \frac{-G_d(s) * G_p(s)}{1 + G_r(s) * G_p(s)} \quad (6)$$

- b. Given the frequency response theorem the high pass filter is preferable since it would guarantee around $-4dB$ of attenuation of the disturbance.



Figur 3: Möjliga bodediagram för $G_d(s)$

6. Vi har ett system med dynamik enligt följande ekvationer:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + 3x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t). \end{aligned}$$

Vi kan välja mellan två olika sensorer som skulle ge oss $y_1(t)$ respektive $y_2(t)$ som utsignal där var och en skulle mäta systemet enligt följande ekvationer:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_2(t), \\ y_2(t) &= 2x_1(t) + x_2(t). \end{aligned}$$

- a. Visa att båda sensorerna är observerbara. (1 p)
- b. Designa ett Kalmanfilter med poler i $[-5, -7]$ för en valfri sensor från (a). (2 p)

Solution

- a. We do the observability test against the dynamics matrix of the system for the two different output function. The dynamics matrix and the C matrices are retrieved from the given equations:

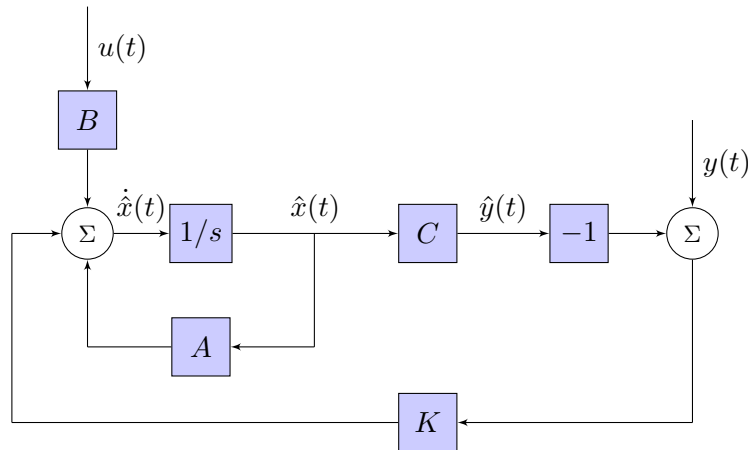
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = [0, 1], C_2 = [2, 1]. \quad (7)$$

The resulting observability matrices are:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 * A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 * A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Both have full-rank, making the systems observable for both sensors.

- b. This is the block scheme of an observer:
We now have to choose the vector $K = [k_1, k_2]'$ such that the dynamics of the



error $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ has poles in $[-5, -7]$. The dynamics matrix of the error is:

$$A - K * C_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 - k_1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$A - K * C_2 = \begin{bmatrix} -3 - 2k_1 & 3 - k_1 \\ 1 - 2k_2 & -k_2 \end{bmatrix}.$$

The characteristic polynomial is:

$$\det(sI - A + KC_2) = (s + 3)(s + k_2) - (3 - k_1) = s^2 + (3 + k_2)s + 3k_2 + k_1 - 3$$

$$\det(sI - A + KC_1) = (s + 3 + 2k_1)(s + k_2) - (-3 + k_1)(-1 + 2k_2) = s^2 + (3 + 2k_1 + k_2)s + 9k_2 + k_1 - 3$$

We want this matrix to have characteristic polynomial equal to $(s+5)*(s+7) = s^2 + 12s + 35$. Hence we obtain the system of equations for C_1 :

$$12 = 3 + k_2,$$

$$35 = 3k_2 + k_1 - 3.$$

Which has solution:

$$k_1 = 11$$

$$k_2 = 9$$

And we get this system of equations for C_2 :

$$12 = 3 + 2k_1 + k_2,$$

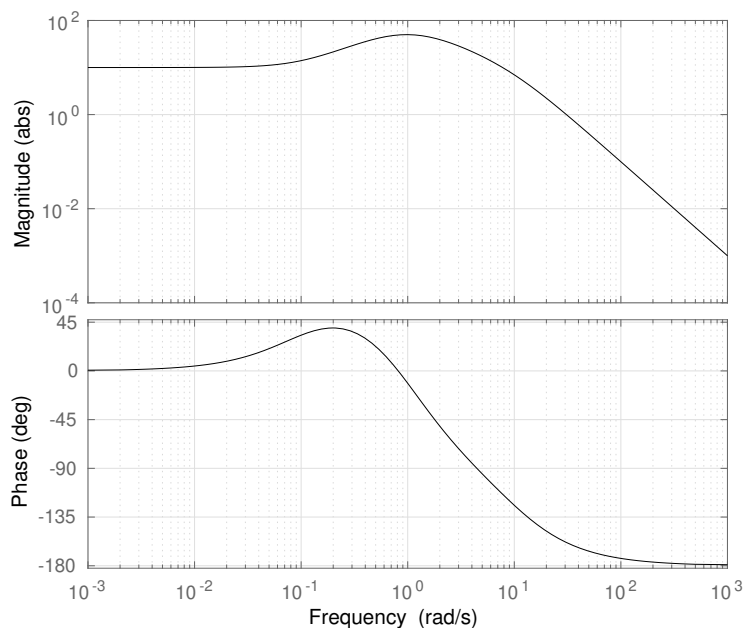
$$35 = 9k_2 - 3 + k_1.$$

Which has solution:

$$k_1 = 43/17 \approx 2.529$$

$$k_2 = 9 - 86/17 \approx 3.941$$

7. Vi försöker reglera en process vars Bode-diagram ges av Figur 4. Vi testar med enkel återkoppling och finner att vårt slutna system reagerar önskvärt snabbt på stegändringar men att överslängen är för stor och det är för lång insvängningstid.
- Problemen vi har tyder på dåliga stabilitetsmarginaler, hur stora stabilitetsmarginaler A_m och φ_m har systemet och vilken är det som ska förbättras för att åtgärda problemet? (1 p)
 - Designa en kompensering som åtgärdar problemet men inte ändrar hur snabbt systemet reagerar på stegändringar. (2 p)
 - Vad kommer det nya slutna systemet bli sämre på jämfört med systemet utan kompensering? (1 p)



Figur 4: Bodediagram för processen i uppgift 7.

Solution

- Amplitudmarginalen är oändlig och fasmarginalen är ca 20° . Uppenbarligen är det fasmarginalen som ska förbättras.
- En tumregel för val av marginaler är att fasmarginalen är större än ca 45° . Vi behöver därför en fasanvancerande länk som lyfter fasan med minst 25° vid skärfrekvensen samtidigt som den har förstärkning 1 vid skärfrekvensen för att inte göra systemet snabbare. Överföringsfunktionen för en fasanvancerande länk ges av.

$$G(s) = K \frac{1 + \frac{s}{b}}{1 + \frac{s}{bN}}$$

Från formelbladet fås att ges att $N = 3$ ger ett maximalt faslyft på 30° vilket är tillräckligt. Det maximala lyftet sker vid frekvensen $w = b\sqrt{N}$ som vi vill ska vara skärfrekvensen. Skärfrekvensen läses i diagrammet till 30 rad/s.

$$b = \frac{30}{\sqrt{3}} \approx 17.3$$

Förstärkningen vid skärfrekvensen är

$$G(w_c) = K \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 1$$

Vilket ger

$$K = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}} \approx 0.577$$

Länken ges då av

$$G(s) = 0.577 \frac{1 + \frac{s}{17.3}}{1 + \frac{s}{51.9}}$$

- c. Vår fasavancerande länk har en förstärkning mindre än 1 för låga frekvenser. Detta innebär att det stationära felet kommer bli större.