LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 6 Mars 2012 kl 14-19

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

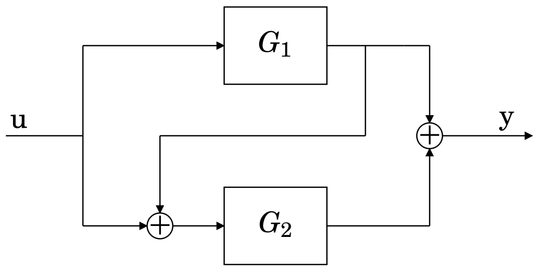
Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås senast fredagen den 16:e mars på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset samt på institutionens hemsida.



Figur 1 Blockschema för systemet i uppgift 1.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK

1. Två system, G_1 och G_2 är sammankopplade enligt figur 1.

a. Bestäm överföringsfunktionen från u till y. (1 p)

b. Bestäm systemets poler och nollställen om delsystemen är givna av

$$G_1(s) = \frac{1}{s+4}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{s+5}.$$

(1 p)

c. Bestäm och skissa systemets stegsvar (1 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen från u till y ges av

$$G_{yu} = G_1 + G_2 + G_1 G_2. \tag{1}$$

b. Med de givna systemen erhålls

$$G_{yu} = \frac{1}{s+4} + \frac{2}{s+5} + \frac{2}{(s+4)(s+5)} = \frac{3}{s+4}. \tag{2}$$

Systemet saknar alltså nollställen och har en pol i -4.

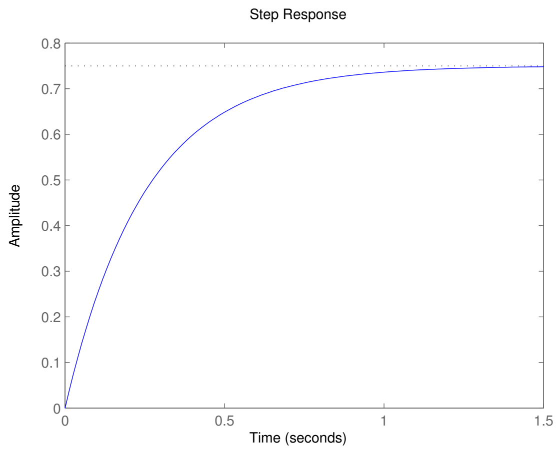
c. Då insignalen är ett steg, $U(s) = \frac{1}{s}$, ges systemets utsignal av

$$Y(s) = \frac{3}{s+4} \cdot \frac{1}{s}.$$

Inverstransformering ger

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{3}{4}(1 - \mathrm{e}^{-4t}) \tag{3}$$

Systemets stegsvar kan ses i figur 2.



Figur 2 Stegsvar för systemet i uppgift 1.

2. Ett systems dynamik ges av följande olinjära differentialekvation

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}^4}{z^2} - z = \sqrt{u}$$

där u är insignalen och utsignalen ges av $y = z^2 + u^2$.

a. Inför tillstånden $x_1 = z$ och $x_2 = \dot{z}$ och skriv systemet på tillståndsform. (0.5 p)

b. Beräkna de stationära punkterna. (1 p)

c. Linjärisera systemet kring den stationära punkt som svarar mot $u = 9$. (1.5 p)

Solution

a. Införande av tillstånden ger följande tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & &(= f_1(x,u)) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_2^4}{x_1^2} + x_1 + \sqrt{u} & &(= f_2(x,u)) \\ y &= x_1^2 + u^2 & &(= g(x,u)) \end{aligned} \tag{4}$$

b. Från den första ekvationen i (4) erhålls $x_2^0 = 0$. Insättning av $x_2 = 0$ i den andra tillståndsekvationen följande villkor för stationäritet

$$0 = x_1 + \sqrt{u}. \tag{5}$$

De stationära punkterna ges av $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (-\sqrt{t}, 0, t)$, $t \geq 0$. I stationäritet ges utsignalen således av $y^0 = t + t^2$.

c. $u = 9$ ger den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0, y^0) = (-3, 0, 9, 90)$. De partiella derivatorna är

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2\frac{x_2^4}{x_1^3} + 1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -4\frac{x_2^3}{x_1^2}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 2u,$$

Inför nya variabler

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \\ \Delta y &= y - y^0. \end{aligned} \tag{6}$$

Det linjäriserade systemet ges av

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{bmatrix} -6 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + 18 \Delta u \end{aligned} \tag{7}$$

3. Bodediagrammet för ett öppet system är givet i figur 3.

a. Beräkna fas- och amplitudmarginal för detta system. (1 p)

b. Skissa Nyquistkurvan för systemet. Markera speciellt fas- och amplitudmarginal samt punkten svarande mot $\omega = 0.5$ rad/s. (1 p)

c. Är amplitud- och fasmarginalen bra stabilitetsmått för det här systemet? Motivera ditt svar. (1 p)

Solution

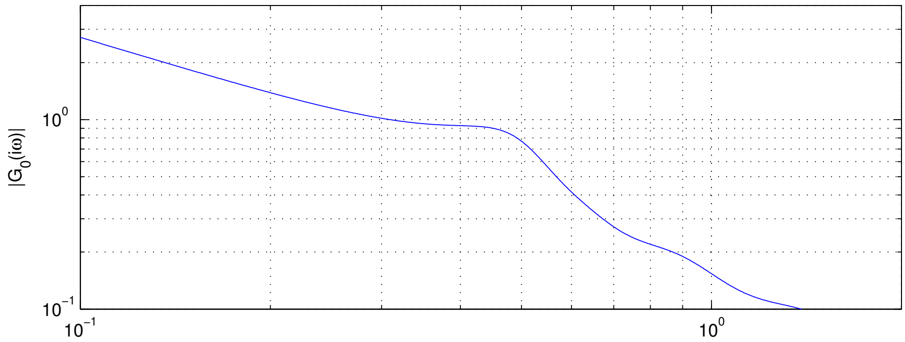
a. Skärfrekvensen ω_c kan avläsas till 0.3 rad/s och fasförskjutningen vid denna frekvens till ungefär $-110°$. Fasmarginalen φ_m är därför $70°$.

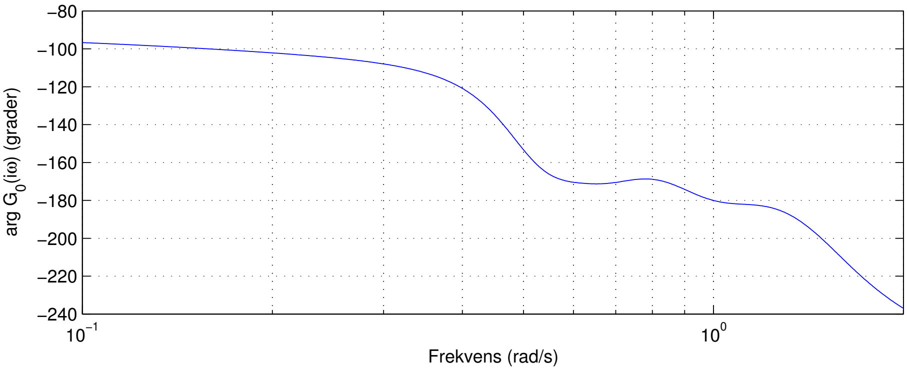
Frekvensen ω_0 där fasförskjutningen är $-180°$ kan avläsas till ungefär 1 rad/s, och vid denna frekvens är förstärkningen ungefär 0.15. Amplitudmarginalen A_m blir därför ungefär 6.7.

(Exakta värden är $\omega_c = 0.31$ rad/s, $\varphi_m = 71.3°$, $\omega_0 = 1.00$ rad/s och $A_m = 6.49$)

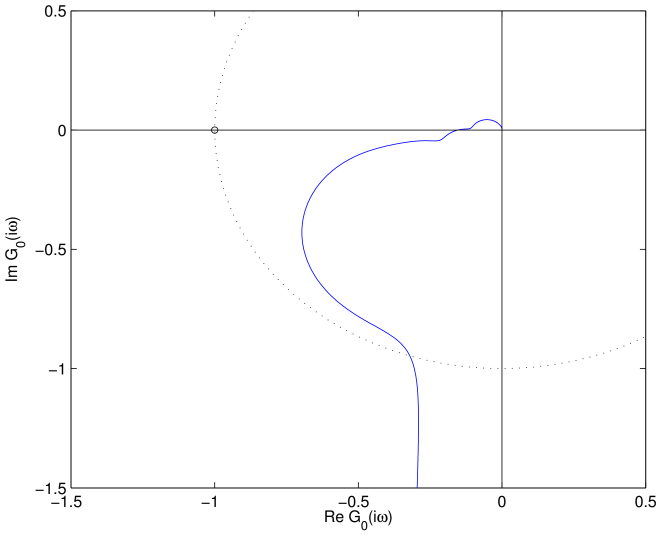
b. Nyquistdiagrammet för systemet är ritat i figur 4.

c. Nej, både amplitudmarginalen och fasmarginalen antyder att stabilitetsmarginalerna är goda. Dessa stabilitetsmått fångar dock inte att Nyquistkurvan går nära den kritiska punkten -1. Om man t.ex. förstärker systemet med en faktor 2 kommer fasmarginalen att försämras till $12°$.

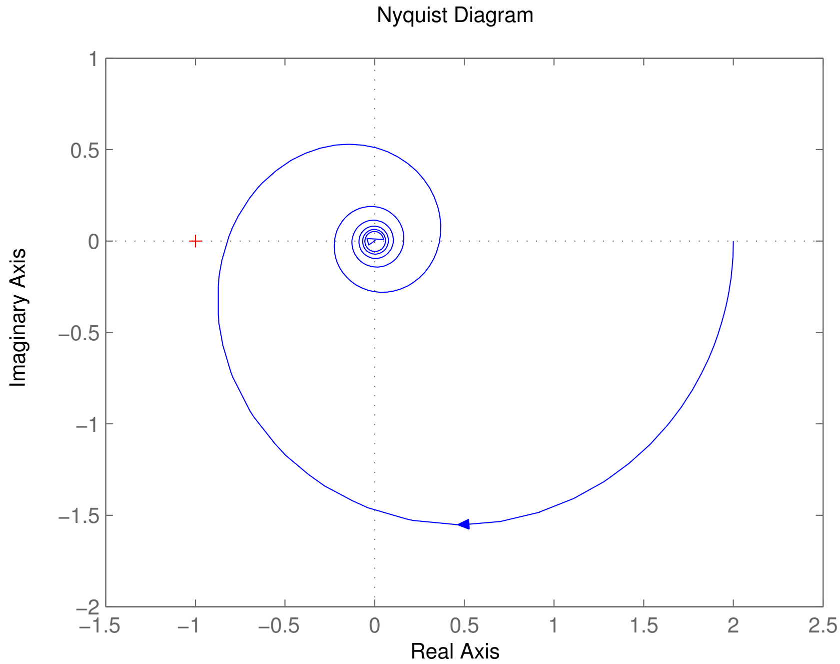




Figur 3 Bodediagram för det öppna systemet i uppgift 3.



Figur 4 Nyquistdiagram för det öppna systemet i uppgift 3.



Figur 5 Nyquistdiagram för systemet i uppgift 4.

4. Nyquistkurvan för en stabil process kan ses i figur 5. Avgör med hjälp av figuren om vart och ett av följande påstående är sant, falskt eller om du inte har tillräckligt med information om systemet. Systemet antas vara minimalt, dvs. inga pol-nollställesförkortningar har gjorts. Samtliga svar måste vara motiverade. Varje rätt svar ger 0.5 p. (3 p)

a. Om systemet återkopplas med en P-regulator med förstärkningen $K = 2$ så blir det slutna systemet instabilt.

b. Fasmarginalen vid enkel återkoppling är mindre än 60°.

c. Systemets dödtidsmarginal vid enkel återkoppling är större än 0.1 s.

d. Processens statiska förstärkning är 2.

e. Processen innehåller en integrator.

f. Processen är ett andra ordningens system.

Solution

a. Sant. Amplitudmarginalen kan utläsas i Nyquistdiagrammet till $A_m \approx 1.2$. En P-regulator med $K = 2 > A_m$ skulle således göra det slutna systemet instabilt.

b. Sant. Fasmarginalen kan avläsas i figuren till $\phi_m \approx 30° < 60°$.

c. Ej tillräcklig information. För att beräkna systemets dödtidsmarginal måste vi ha tillgång till systemets skärfrekvens vilken är okänd.

d. Sant. Systemets statiska förstärkning kan avläsas vid Nyquistkurvans början, dvs. vid $\omega = 0$ till 2.

e. Falskt. Hade systemet haft en integrator skulle fasen för låga frekvenser vara $-90°$.

f. Ej tillräcklig information. Tidsfördröjningen gör det omöjligt att utifrån endast Nyquistkurvan avgöra systemets ordning.

5. En industrirobot, se figur 6, består av en kedja av länkar och leder som drivs med motorer. Målet är att styra dessa leder så att robotens verktyg utför en önskad rörelse. Vanligtvis har en robot 6 stycken leder, och dessa styrs var för sig. Sambandet mellan pålagt moment från motorn till robotledens position är olinjärt, men det är möjligt att "linjärisera" modellen genom att använda s.k. *computed torque control*, där man kompenserar för alla olinjära effekter, och kvar blir en linjär överföringsfunktion, nämligen

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Blockschemat för reglersystemet ses i figur 5, där utsignalen från P_2 är ledens hastighet och utsignalen från P_1 är ledens position.

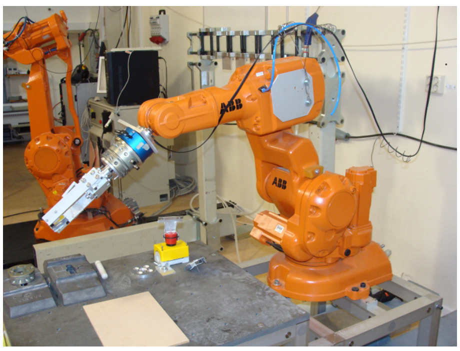
$$P_1 = \frac{1}{s}, \qquad P_2 = \frac{1}{s}$$

a. Vad är detta för typ av regulatorstruktur? (1 p)

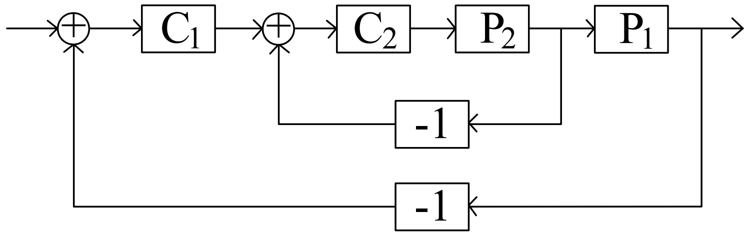
b. Vid robotreglering är normalt C_2 en PI-regulator och C_1 en P-regulator. Designa C_2 så att den inre reglerkretsens poler placeras med en snabbhet $\omega = 10$ rad/s, och en relativ dämpning $\zeta = 0.8$. (2 p)

c. Förklara hur man bör designa den yttre reglerkretsen för att man ska kunna approximera den inre kretsen med en förstärkning K. Hur ska K väljas? Varför är man intresserad av att göra en sådan approximation? (1 p)

Solution



Figur 6 En ABB IRB140 i institutionens robotlab, här utrustad med en kraftsensor och ett gripdon.



Figur 7 Blockschema för reglersystemet i uppgift 5.

a. Detta är ett exempel på kaskadreglering.

b. Den inre reglerkretsen har överföringsfunktionen

$$G_{inre}(s) = \frac{P_2C_2}{1 + P_2C_2}.$$

Eftersom C_2 ska vara en PI-regulator ska den ha överföringsfunktionen

$$C_2(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_is}\right) = K\frac{1 + T_is}{T_is}.$$

Det slutna systemets överföringsfunktion ges då av

$$G_{inre}(s) = \frac{P_2C_2}{1 + P_2C_2} = \frac{\frac{K}{T_i}(1 + T_is)}{s^2 + Ks + \frac{K}{T_i}}.$$

Den givna polspecifikationen innebär att nämnarpolynomet ska ha följande utseende

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = s^2 + 16s + 100.$$

Jämförelse av koefficienter ger då att följande ekvationssystem måste lösas för att erhålla K och T_i

$$\begin{cases} 16 &= K \\ 100 &= \frac{K}{T_i} \end{cases}$$

Lösningen ges av $K = 16$ och $T_i = 0.16$. C_2 ska alltså vara

$$C_2(s) = 16\left(1 + \frac{1}{0.16s}\right).$$

c. Om man vill kunna approximera den inre kretsen med en förstärkning när den yttre kretsen designas måste den inre vara betydligt snabbare än den yttre. Förstärkningen K ska väljas som den inre kretsens statiska förstärkning. Anledningen till att man vill göra den här approximationen är att det förenklar designen av den yttre kretsen.

6. Dynamiken i en kemisk process kan approximeras väl med överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s/2 + 1)}\mathrm{e}^{-0.5s}.$$

Att enkelt återkoppla processen ger i detta fall inte tillfredställande prestanda. Ditt uppdrag är därför att designa en kompenseringslänk så att det kompenserade systemet blir dubbelt så snabbt som det okompenserade systemet. Samtidigt får fasmarginalen minska med högst 6°. (3 p)

Solution

För att göra systemet snabbare använder vi en fasavancerande länk

$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN} \tag{8}$$

Vi börjar med att ta reda på processens skärfrekvens.

$$\begin{gathered} |G_p(i\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow |\frac{1}{i\omega_c(i\omega_c/2+1)}| = 1 \Leftrightarrow 2 = |-\omega_c^2 + i2\omega_c| = \\ 4 = \omega_c^4 + 4\omega_c^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 0.828 \Rightarrow \omega_c = 0.91 \text{ rad/s} \end{gathered} \tag{9}$$

Enligt specifikationen skall snabbheten dubbleras dvs.

$$\omega_c^* = 2\omega_c. \tag{10}$$

Argumentet vid skärfrekvensen, $G_p(i\omega_c)$, ges av

$$\arg(G(i\omega_c)) = -90^\circ - \arctan(\frac{\omega_c}{2}) - 0.5\omega_c \frac{180^\circ}{\pi} = -140.5^\circ \tag{11}$$

Fasmarginalen är således $\varphi_m = 180^\circ - 140.5^\circ = 39.5^\circ$. Argumentet vid den nya skärfrekvensen är

$$\arg(G(i\omega_c^*)) = -90^\circ - \arctan(\frac{\omega_c^*}{2}) - 0.5\omega_c^* \frac{180^\circ}{\pi} = -184.4^\circ. \tag{12}$$

Fasmarginalen vid den nya skärfrekvensen är $\varphi_m^* = 180^\circ - 184.4^\circ = -4.4^\circ$. Kompenseringlänken måste således ge ett fasbidrag på minst $\Delta\varphi \geq 4.4^\circ + 39.5^\circ - 6^\circ = 37.9^\circ$ för att uppfylla specifikationen. Avläsning i tabell ger N = 5. Faskurvans topp ligger vid frekvensen $\omega = b\sqrt{N}$. Således är

$$b = \frac{1.82}{\sqrt{5}} \approx 0.81. \tag{13}$$

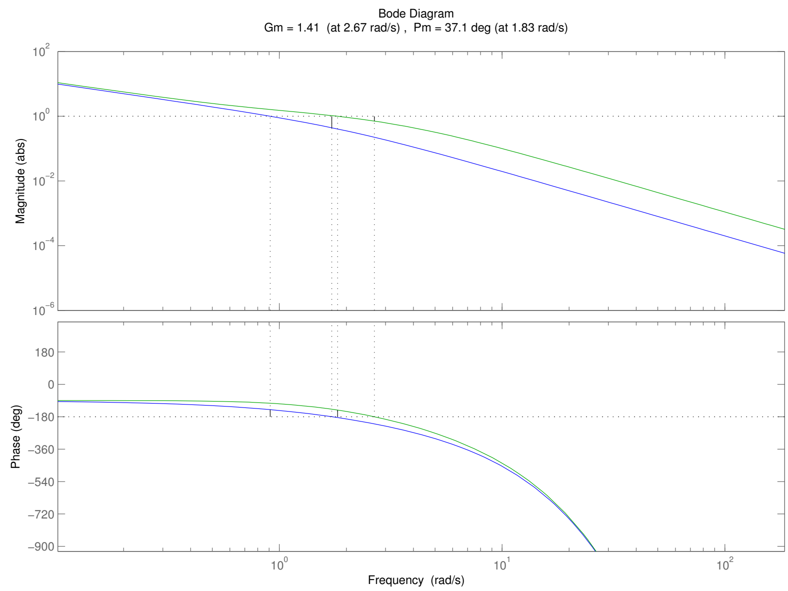
Det återstår att bestämma K_K så att ω_c^* verkligen blir det kompenserade systemets skärfrekvens. Vid faskurvans topp har kompenseringslänken förstärkningen $K_K\sqrt{N}$

$$\begin{aligned} K_K\sqrt{5}\,|G(i\omega_c^*)| &= 1 \\ K_K\sqrt{5} \cdot 0.4064 &= 1 \\ K_K = \frac{1}{0.4064\sqrt{5}} &= 1.10. \end{aligned} \tag{14}$$

Kompenseringslänken ges av

$$G_K(s) = 5.5 \frac{s+0.81}{s+4.05}. \tag{15}$$

Det okompenserade och det kompenserade systemen återfinns i figur 8.



Figur 8 Okompenserat och kompenserat system.

7. Ett fjäder-massa-dämpar-system enligt figur 9 kan beskrivas av följande differentialekvation:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

där x är massans position, f är en extern kraft och insignal till systemet, c är systemets dämpningskonstant och k är fjäderkonstanten. Mätsignalen är massans position.

a. Inför tillstånden $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $f = u$ och skriv systemet på tillståndsform.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

(1 p)

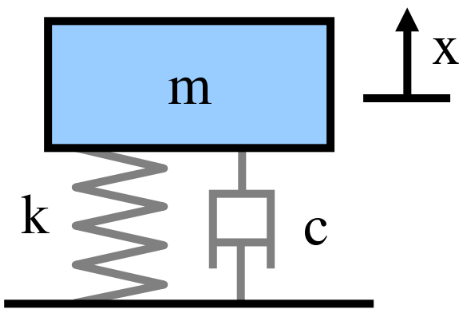
b. Bestäm systemets poler då $c = 0$, $k = 1$ och $m = 1$. Är systemet asympotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? Hur kan man inse detta genom att endast betrakta figur 9 med de givna parametrarna? (1 p)

c. Designa en tillståndsåterkoppling $u = -Lx + l_r r$ för det givna systemet så att det slutna systemet får en statisk förstärkning 1 samt att polerna hamnar i -2. (2 p)

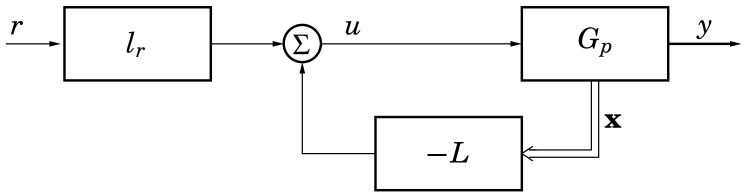
d. I verkligheten kan man inte mäta $\dot{x}$, vilket betyder att man endast kan återkoppla ett tillstånd, x_1 dvs. $u = -l_1 x_1 + l_r r$. Modifiera blockschemat i figur 10 i enlighet med detta. Vilken sorts regulator liknar det nu? (1 p)

e. Visa att det inte går att placera systemets poler i -2 med denna typ av regulator. (1 p)

Solution



Figur 9 Ett fjäder-massa-dämpar system i uppgift 7.



Figur 10 Blockschema för tillståndsåterkoppling i uppgift 7.

a. Införandet av tillstånden $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ med $u = f$ ger tillståndsformen:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b. Systemets överföringsfunktion beräknas enligt $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, med $c = 0$, $k = 1$ och $m = 1$.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

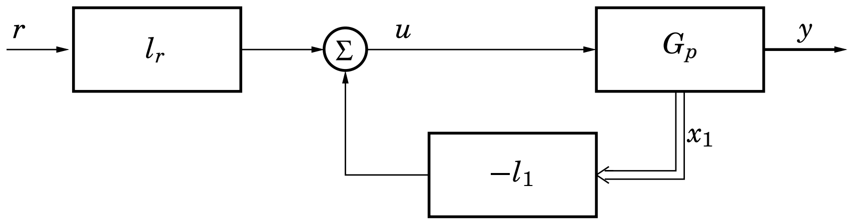
Systemet är stabilt, men ej asymptotiskt stabilt, eftersom polerna ligger i $s = \pm i$. Detta kan inses eftersom dämpningskonstanten $c = 0$, innebär att systemet inte har någon dämpning och därmed kommer att oscillera utan att oscillationerna avklingar.

c. Det slutna systemets karaktäristiska ekvation ges av

$$\det(sI - A + BL) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right)$$
$$= s^2 + l_2 s + 1 + l_1.$$

Jämför polynomet ovan med $(s+2)^2$, där $l_1 = 3$ och $l_2 = 4$ erhålls. l_r bestäms genom att sätta $G(dv0) = 1$, vilket ger

$$l_r = \frac{1}{C(-A + BL)^{-1}B} = 4$$



Figur 11 Modifierat blockschema i 7 d.

d. Överföringsfunktionen från referens till utsignal kommer att ges av

$$G = \frac{G_p l_r}{1 + G_p l_1}. \tag{16}$$

Det modifierade systemet är ekvivalent med en P-regulator med börvärdesviktning dvs, $u = K(\beta r - y)$ som ger en överförningsfunktion för det slutna systemet

$$G = \frac{K\beta G_p}{1 + G_p K}.$$

e. Det slutna systemets karaktäristiska ekvation ges av (16)

$$s^2 + 1 + l_1 \tag{17}$$

Vid jämförelse med $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$ inses att lösning saknas.