LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 8 januari 2020, 8:00–13:00

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsnivåer:

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tid och plats för tentavisning kommer att anges på kurshemsidan.

1. Följande differentialekvation beskriver ett system.

$$y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = u'(t) + 3u(t)$$

a. Hitta systemets överföringsfunktion. (1 p)

b. Bestäm en tillståndsbeskrivning av systemet. (1 p)

c. Är systemet stabilt? (0.5 p)

Solution

a. Vi börjar med att laplacetransformera differentialekvationen och får då:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 4Y(s) = sU(s) + 3U(s)$$

Därefter löser vi ut $Y(s)$ och får överföringsfunktionen:

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+4}$$

b. Vi väljer t.ex. den observerbara kanoniska formen och identifierar parametrarna a_i och b_i och skriver upp tillståndsbeskrivningen enligt formelsamlingen.

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+4} = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$\dot{x(t)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

c. Processen är stabil eftersom det karakteristiska polynomet $s^2 + 3s + 4$ har positiva koefficienter.

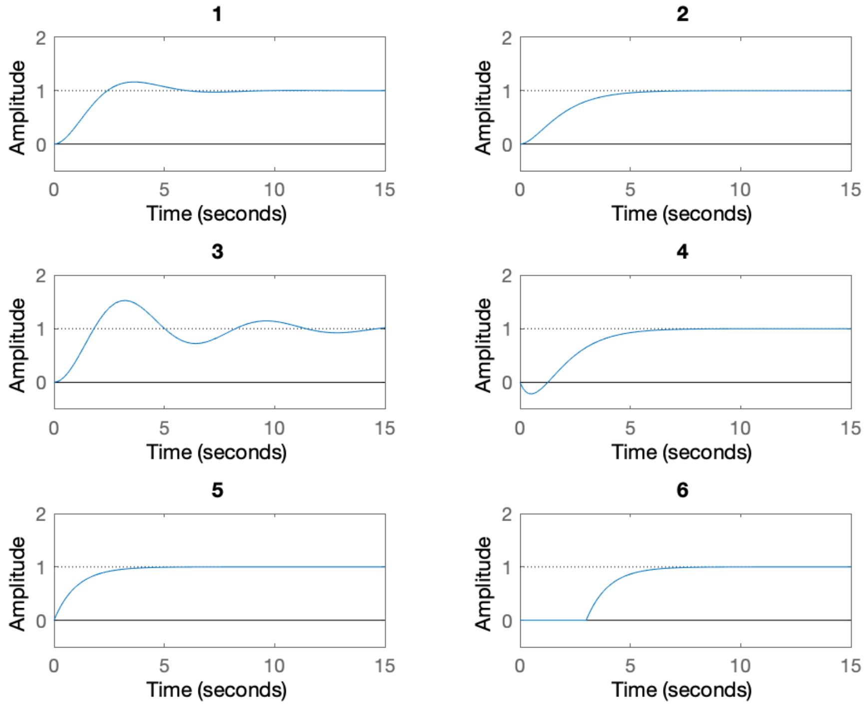
2. Para ihop rätt stegsvar i figur 1 med rätt överföringsfunktion. Motivering av svaren krävs för att få poäng. (3 p)

$$G_1 = \frac{e^{-3s}}{s+1} \qquad G_2 = \frac{e^{-7s}}{s+1}$$

$$G_3 = \frac{1}{s^2+0.4s+1} \qquad G_4 = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$G_5 = \frac{1}{s^2+2s+1} \qquad G_6 = \frac{-s+1}{s^2+2s+1}$$

$$G_7 = \frac{5}{s+1} \qquad G_8 = \frac{1}{s+1}$$



Figur 1 Bodediagram till uppgift 2

Solution

Både G_1 och G_2 har tidsfördröjning. Av stegsvaren är det endast nr 6 som har tidsfördröjning och den har en fördröjning på 3 sek. Alltså: G_1= nr 6.

Stegsvar nr 4 har omvänd respons precis i början. G_6 är den enda överföringsfunktionen som har ett nollställe i höger halvplan. Alltså: G_6 = nr 4.

Stegsvar nr 5 är av första ordningen och har en statisk förstärkning på 1. G_7 har en statisk förstärkning på 5 och utesluts på det viset, G_8 har en statisk förstärkning på 1 och är av första ordningen. Alltså: G_8 = nr 5.

Stegsvar nr 1, 2 och 3 är alla av andra ordningen med statisk förstärkning 1 och ungefär lika snabba svar, det som skiljer dem åt är dämpningen. Stegsvar 2 är väl dämpat, stegsvar 1 är mellandämpat och stegsvar 3 är minst dämpat. G_3 motsvarar ett system med dämpning 0.2, G_4 ett system med dämpning 0.5, och G_5 ett system med dämpning 1. Alltså: G_3 = nr 3, G_4 = nr 1 och G_5 = nr 2.

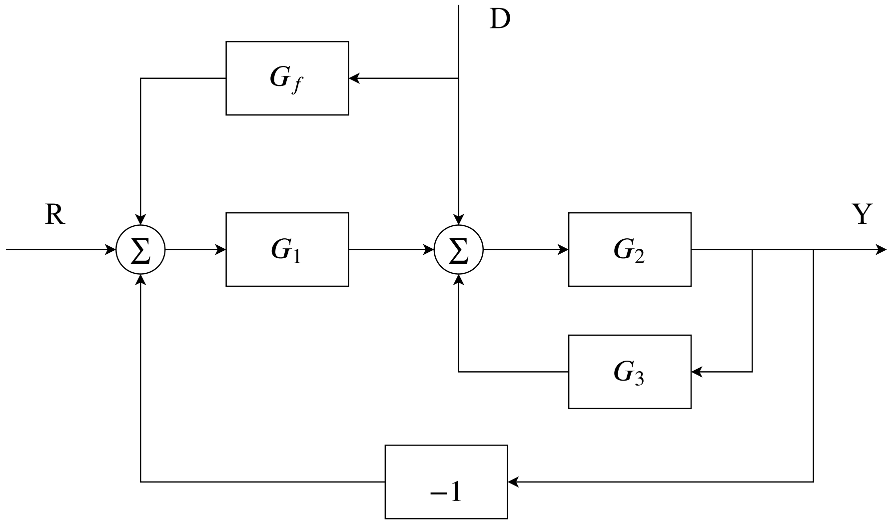
3. Figur 2 visar blockdiagrammet för uppgiften.

a. Hitta överföringsfunktionen från R till Y. (2 p)

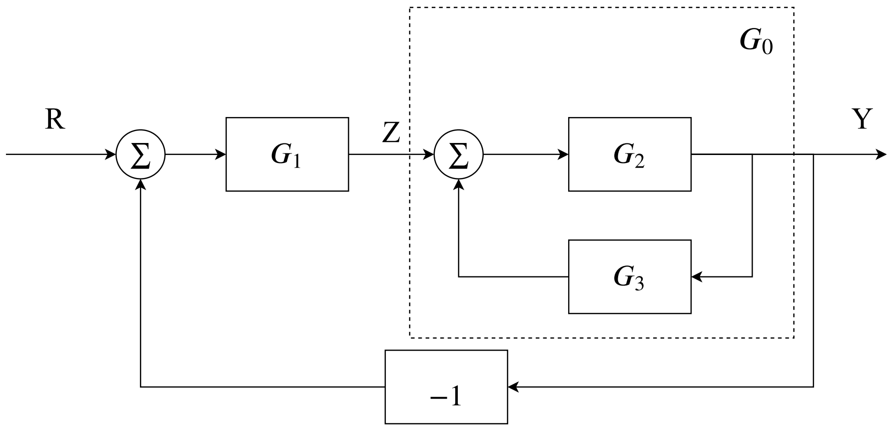
b. Bestäm framkopplingen G_f så att störningar från D elimineras. (1 p)

Solution

a. Eftersom vi söker överföringsfunktionen från R till Y ansätter vi att D är noll. Dessutom inför vi hjälpvariablerna Z enligt figur 3.



Figur 2 Blockdiagram till uppgift 3



Figur 3 Blockdiagram till lösningen för första deluppgiften i uppgift 3.

Vi börjar med att beräkna överföringsfunktionen från Z till Y, kallad G_0 i figur 3.

$$Y = G_2(Z + G_3 Y)$$

$$Y = \frac{G_2}{1 - G_2 G_3} Z = G_0 Z$$

Därefter beräknar vi överföringsfunktionen från R till Y.

$$Y = G_0 G_1 (R - Y)$$

$$Y = \frac{G_0 G_1}{1 + G_0 G_1} R = \frac{\frac{G_2}{1-G_2G_3} G_1}{1 + \frac{G_2}{1-G_2G_3} G_1} R = \frac{G_2 G_1}{1 - G_2 G_3 + G_2 G_1} R$$

b. Vi söker G_f sådan att störningen inte har någon påverkan, detta får vi då

$$G_f G_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow G_f = \frac{-1}{G_1}$$

4. Följande påståenden handlar om ett återkopplat system som har en P-, PI- eller PID-regulator. Avgör för varje påstående om det är sant eller falskt. Motivering av svaren krävs för att få poäng. (2.5 p)

a. Det stationära reglerfelet hos en P-regulator kan minskas genom att förstärkningen K minskas.

b. Det främsta syftet med I-delen i en PI-reglulator är att ta bort oscillationer i stegsvaret.

c. Det är alltid bäst att använda en PID-regulator eftersom den är mest avancerad.

d. För att eliminera laststörningar måste det finnas en integrator i processen, huruvida det finns en integrator i regulatorn spelar ingen roll.

e. Om förstärkningen K i en P-regulator ökas blir stegsvaret generellt snabbare.

Solution

a. Falskt - Styrsignalen i en P-regulator beräknas enligt $u = Ke$ där e är reglerfelet. För att det ska finnas en styrsignal måste det finnas ett reglerfel. För att minska reglerfelet måste K ökas.

b. Falskt - I-delens främsta syfte är att få bort det stationära reglerfelet som finns då endast en P-regulator används.

c. Falskt - Tänk på labb 1, där blev regleringen av den övre tanken sämre när D-delen lades till. Detta berodde på att övre tanken är ett första ordningens system och D-delen blev "överflödig", "det fanns ingen långsam dynamik i systemet för D-delen att förutspå".

d. Falskt - För att eliminera laststörningar behöver det finnas integratorer i regulatorn, detta kallas regulatorproblemet. Hur många integratorer som behövs beror på vilken typ av laststörning som sker.

e. Sant - Detta kan vi se om vi tittar på bodediagrammet för systemet. Om K-parametern ökas kommer hela amplitudkurvan att lyftas, detta gör att skärfrekvensen ökar − alltså att systemet blir snabbare. Dock leder ofta den ökade skärfrekvensen också till att fasmarginalen minskar vilket är anledningen till att ett ökat K ofta leder till mer oscillationer i systemet.

5. Följande olinjära system på tillståndsform beskriver ett biologiskt system där x_1 är biomassans koncentration, x_2 substratets koncentration och u utspädningshastigheten:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1x_2 - ux_1\\ \dot{x}_2 &= -2x_1x_2 + (x_2 - x_1)u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

a. Bestäm alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) till systemet. (1 p)

b. Linjärisera systemet kring den stationära punkt där $x_1^0 = 1$. (2 p)

Solution

a. De stationära punkterna ges av $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0, 0, t)$, $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0, t, 0)$, $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (t, 0, 0)$ samt $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (t/3, t, t)$ för $t \in \mathbf{R}$. (De stationära punkter som kan uppkomma i praktiken är dock endast de för vilka $t \geq 0$, eftersom tillståndsvariablerna och styrsignalen motsvarar icke-negativa variabler.)

b. Det finns två olika stationära punkter för vilka $x_1^0 = 1$: $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 0, 0)$ och $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 3, 3)$. Eftersom det troligen är den andra punkten som är intressant i praktiken så väljer vi här att linjärisera kring denna. Från systemekvationerna

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 - u x_1 =: f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 x_2 + (x_2 - x_1)u =: f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= x_1 =: g(x_1, x_2, u) \end{aligned}$$

får vi de partiella derivatorna

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 - u, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = -x_1, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2x_2 - u, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2x_1 + u, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = x_2 - x_1, \\ &\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

Med $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y_0$ får vi då det linjäriserade systemet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 1 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x = \Delta x_1 \end{aligned}$$

6. Betrakta följande system på tillståndsform:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

a. Designa en observerare

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}),$$

så att Kalmanfiltrets poler placeras på avståndet $\omega = 4$ från origo med relativ dämpning $\zeta = 0.75$. (2 p)

b. När observeraren testas i praktiken visar det sig att mätbruset för processen är större än förväntat. Förklara hur du skulle kunna förändra designen av din observerare för att ta hänsyn till detta. (1 p)

Solution

a. Det önskade karakteristiska polynomet för observeraren är

$$s^2 + 6s + 16,$$

som identifieras mot

$$\det(sI - A + KC) = s^2 + (k_2 + 3)s + k_1 + 2k_2 + 2,$$

vilket ger $k_1 = 8$, $k_2 = 3$, dvs

$$K = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

b. När mätbruset är större än förväntat bör observeraren göras långsammare, dvs dess poler bör placeras närmare origo.

7. Ett system är givet på tillståndsformen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

a. Är systemet styrbart? (1 p)

b. Bestäm en tillståndsåterkoppling $u = -Lx$ så att det slutna systemets poler är placerade i -5. (2 p)

Solution

a. Styrbarhetsmatrisen W_c ges av

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

vars rang är 2. Därmed är systemet styrbart.

b. Eftersom systemet är styrbart kan vi placera polerna för det slutna systemet godtyckligt. Genom att kombinera $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ och tillståndsåterkopplingen $u = -Lx$ får vi att det slutna systemets dynamik ges av

$$A - BL = \begin{bmatrix} -5 - l_1 & -l_2 \\ 1 - l_1 & -4 - l_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

med motsvarande karaktäristisk ekvation

$$|sI - A + B| = \begin{vmatrix} s+5+l_1 & l_2 \\ -1+l_1 & s+4+l_2 \end{vmatrix} = s^2 + (9+l_1+l_2)s + 20 + 4l_1 + 6l_2 \tag{2}$$

Det önskade karaktäristiska polynomet ges av

$$(s+5)^2 = s^2 + 10s + 25$$

Jämförelse av koefficienterna ger följande ekvationer

$$\begin{aligned} 9 + l_1 + l_2 = & \quad 10 \\ 20 + 4l_1 + 6l_2 = & \quad 25 \end{aligned}$$

med lösningen $l_1 = l_2 = \dfrac{1}{2}$.

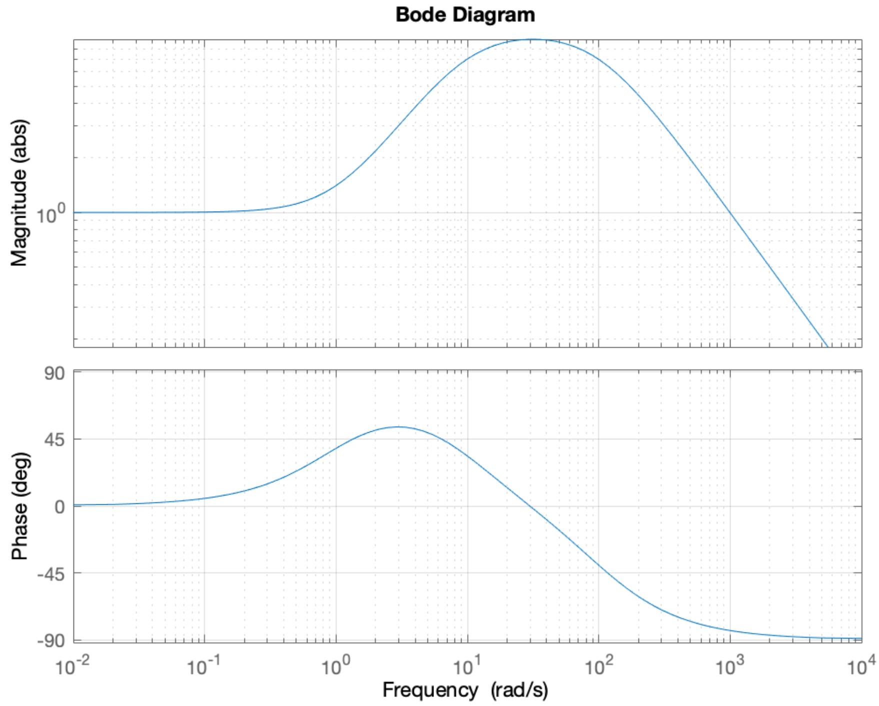
8. Skissa Bodediagrammet för ett system med följande egenskaper:

- statisk förstärkning K
- ett nollställe vid frekvensen $\omega_z = \bar{\omega}_z$(rad/s)
- en pol vid frekvensen $\omega_{p1} = 10\omega_z$
- en pol vid frekvensen $\omega_{p2} = 10\omega_{p1}$

För förstärkningsdiagrammet räcker det att rita asymptoter. Skriv upp lutningen för linjen (som vanligt, i termer av dekader per dekad) i de olika delarna av förstärkningsdiagrammet. Du behöver inte ange siffror för de olika variablerna $(K, \omega_z, \omega_{p1}, \omega_{p2})$, det viktiga är att markera dem korrekt i diagrammet och att de placeras korrekt relativt varandra. (2 p)

Solution

Bodediagrammet bör se ut ungefär såhär: De tre singulariteterna måste vara på en dekads avstånd från varandra och i rätt ordning (från vänster: nollställe, pol och pol). Även lutningen måste vara korrekt (0,+1,0,-1) och den statiska förstärkningen måste markeras korrekt i diagrammet.


Bode Diagram
Magnitude (abs)
10^0
Phase (deg)
90
45
0
-45
-90
10^{-2}
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Frequency (rad/s)

9. Antag att processen $G_P(s)$ är ett första ordningens system med tidsfördröjning:

$$G_P(s) = \frac{2}{s+1} e^{-0.5s}$$

Vi vill reglera processen med en proportionell regulator $G_R(s) = K$.

a. Visa att det återkopplade systemet är stabilt för $K = 1$. (1 p)

b. Antag att vi vill reglera systemet snabbare med en regulator $K > 1$. Vilken är den högsta skärfrekvens $\omega_c^\star$ som kan uppnås innan det återkopplade systemet blir instabilt? (1 p)

c. Skärfrekvensen som kan uppnås i **b.** visar sig vara för långsam. Beskriv med ord hur regulatorstrukturen kan utökas för att möjliggöra snabbare reglering. (1 p)

Solution

a. Antag en process $\hat{G}_P(s) = \frac{2}{s+1}$, dvs processen $G_P(s)$ utan dödtid. För $K = 1$ ges dödtidsmarginalen L_m för $\hat{G}_P(s)G_R(s)$ av

$$L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} = \frac{\pi + \arg\left(\frac{2}{i\omega_c+1}\right)}{\omega_c}.$$

Skärfrekvensen ω_c ges av

$$\left|\frac{2}{i\omega_c + 1}\right| = 1,$$

med lösningen $\omega_c = \sqrt{3}$ rad/s, vilket insatt i (a) ger en dödtidsmarginal på 1.2 s. Eftersom processens dödtid 0.5 s är mindre än dödtidsmarginalen, är det återkopplade systemet stabilt.

b. Dödtidsmarginalen för $\hat{G}_P(s)G_R(s)$ ges här av

$$L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} = \frac{\pi + \arg\left(\frac{2K}{i\omega_c+1}\right)}{\omega_c} = \frac{\pi - \arctan(\omega_c)}{\omega_c}.$$

Vi kräver $L_m > 0.5$ för stabilitet, vilket via numerisk lösning ger $\omega_c^\star = 3.7$.

c. Regulatorstrukturen kan utökas med en Otto-Smith regulator eller, mer generellt, en fasavancerande kompenseringslänk.