LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 13 januari 2022, 14:00–19:00

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsnivåer:

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Din kollega Rhea har ett system beskrivet med följande differentialekvation:

$$\ddot{y} - 4\dot{y} - 5y = u$$

a. Inför tillståndsvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ och hjälp henne hitta tillståndsbeskrivningen för systemet. (1 p)

b. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? (1 p)

c. Rhea har också en inverterad pendel, vilken typ av stabilitet har en sådan? (0.5 p)

Solution

a. Efter att ha infört tillståndsvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ kollar vi vad deras derivata är.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x_2} &= \ddot{y} = 4\dot{y} + 5y + u = 5x_1 + 4x_2 + u \end{aligned}$$

Tillståndsbeskrivningen på matrisform blir då:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

b. För att avgöra stabilitet för systemet behöver vi räkna ut A-matrisens egenvärden. De räknas ut från: $|\lambda I - A| = 0$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4) - 5 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

Med hjälp av pq-formeln får vi

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

Vilket ger oss $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$. Eftersom vi har ett egenvärde i höger halvplan är systemet instabilt.

c. En inverterad pendel är ett klassiskt exempel på ett instabilt system. (En pendel som hänger nedåt är däremot ett asymptotiskt stabilt system.)

2. Antalet kaniner $x_1(t)$ och rävar $x_2(t)$ i en skog kan beskrivas med Lotka-Volterras ekvationer

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= \delta x_1 x_2 - \gamma x_2 - u, \end{aligned}$$

där vår styrsignal u anger antalet rävar som skjuts per vecka under rävjakten, och α, β, γ och δ är positiva reella konstanter.

a. Bestäm alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) för systemet då $u^0 = 0$. (1 p)

b. Linjärisera systemet kring den stationära punkt där $x_1^0 > 0$ och $x_2^0 > 0$. Anta att mätsignalen är antalet rävar, d.v.s. $y = x_2$. (2 p)

c. Är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? (1 p)

d. Antalet rävar $y = x_2$ är vid ett tillfälle fler än det önskade referensvärdet r. Vi vill bestämma hur många rävar som ska skjutas per vecka som en funktion av den aktuella populationen av rävar och kaniner, samt det givna referensvärdet. Vi använder styrlagen $u(t) = l_r r - l_1 x_1 - l_2 x_2$, där l_1, l_2 och l_r är konstanta koefficienter. Bestäm l_1 och l_2 så att det slutna linjäriserade systemet $Y(s) = G(s)R(s)$ får båda sina poler i $s = -0.2$. (2 p)

e. Att jaga räv utan att jaga kanin är kanske inte en så bra idé. Anta att vi för ett konstant referensvärde $r(t) = \varepsilon\alpha/\beta$, med $0 < \varepsilon < 1$, lyckas välja $u(t)$ så att reglerfelet är konstant noll, d.v.s. $x_2(t) = r(t) = \varepsilon\alpha/\beta$, medan $x_1(t) > 0$. Vad händer då med antalet kaniner $x_1(t)$ när $t \to \infty$ enligt de olinjära Lotka-Volterra-ekvationerna? (0.5 p)

Solution

a. Stationära punkter är de punkter för vilka $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$, d.v.s. de punkter som uppfyller

$$\begin{cases} 0 = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ 0 = \delta x_1 x_2 - \gamma x_2 - u. \end{cases}$$

För $u^0 = 0$ får vi två sådana punkter, nämligen $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0, 0, 0)$ och $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta, 0)$.

b. Vi vill linjärisera kring den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta, 0)$. De partiella derivatorna för systemekvationerna blir

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \alpha - \beta x_2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\beta x_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0, \\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \delta x_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \delta x_1 - \gamma, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -1, \\
&\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.
\end{aligned}$$

Med $x = [\,x_1 \quad x_2\,]^T$ inför vi variablerna $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$, vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta x + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\beta\gamma/\delta \\ \alpha\delta/\beta & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta u \\
\Delta y &= [\,\tfrac{\partial g}{\partial x_1} \quad \tfrac{\partial g}{\partial x_2}\,]\big|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta u = [\,0 \quad 1\,]\,\Delta x.
\end{aligned}$$

c. Polerna till systemet är desamma som egenvärdena till matrisen A, vilka ges av nollställena till det karakteristiska polynomet

$$p(s) = \det(sI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s & \beta\gamma/\delta \\ -\alpha\delta/\beta & s \end{bmatrix}\right) = s^2 + \alpha\gamma,$$

d.v.s. $s = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$. Eftersom polerna ligger på den imaginära axeln och är unika så är systemet **stabilt**, men *inte* asymptotiskt stabilt.

d. Insättning av styrlagen i det öppna systemet $\dot{x} = Ax + Bu$ ger det slutna systemet

$$\dot{x} = (A - BL)x + Bl_r r.$$

Systemets poler är desamma som egenvärdena till systemmatrisen för det slutna systemet, d.v.s. $(A - BL)$, och ges av nollställena till

$$\begin{aligned} p(s) = \det(sI - (A - BL)) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & \beta\gamma/\delta \\ -\alpha\delta/\beta & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} s & \beta\gamma/\delta \\ -\alpha\delta/\beta - l_1 & s - l_2 \end{bmatrix} = s^2 - l_2 s + \alpha\gamma + l_1\beta\gamma/\delta. \end{aligned}$$

Vi vill att detta ska vara lika med det specificerade polpolynomet $(s + 0.2)^2 = s^2 + 0.4s + 0.04$. Identifiering av koefficienter ger att detta är uppfyllt om

$$\begin{cases} -l_2 = 0.4 \\ \alpha\gamma + l_1\beta\gamma/\delta = 0.04 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} l_1 = \dfrac{\delta(0.04 - \alpha\gamma)}{\beta\gamma} \\ l_2 = -0.4 \end{cases}.$$

e. När $x_2(t) = \varepsilon\alpha/\beta$ så blir den första av de olinjära ekvationerna

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_1\left(\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_1 = (1 - \varepsilon)\alpha x_1.$$

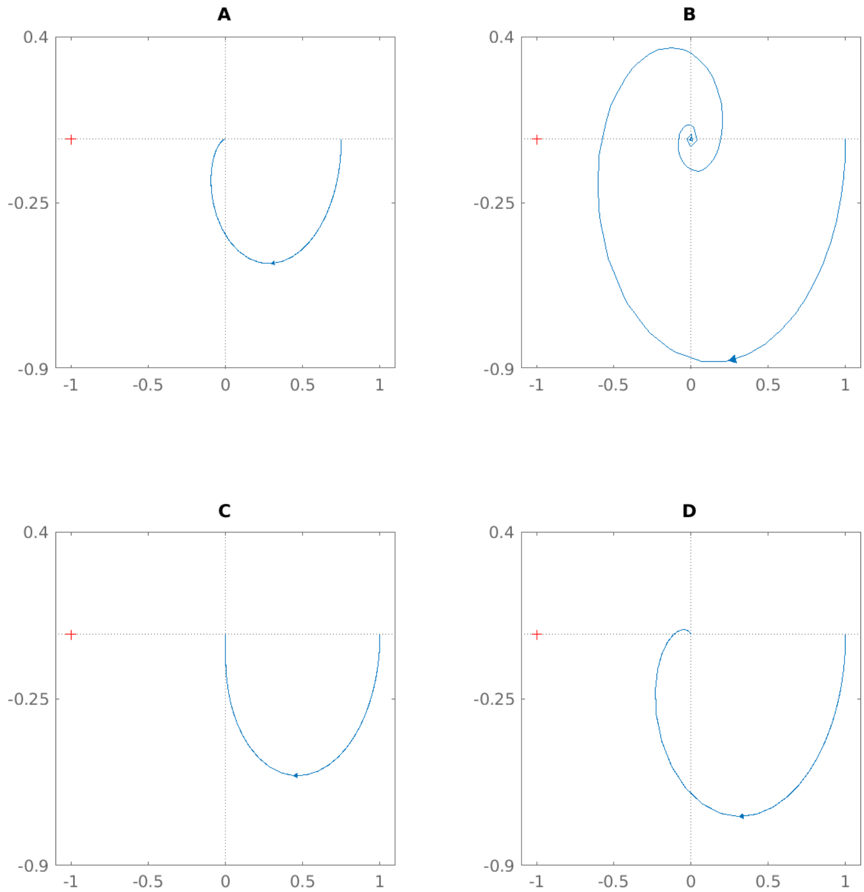
Antalet kaniner beskrivs alltså av ett linjärt första ordningens system, där systemmatrisen är 1×1-matrisen $A = (1 - \varepsilon)\alpha$. Detta innebär att systemet har en pol i $s = (1 - \varepsilon)\alpha$. Om $0 < \varepsilon < 1$ så har vi alltså en pol i höger halvplan, och systemet är därmed instabilt. Antalet kaniner kan alltså öka obegränsat. Differentialekvationen har lösningen $x_1(t) = x_1(0)e^{(1-\varepsilon)\alpha t}$, där vi ser att tillväxten är exponentiell då $x_1(0) > 0$.

3. I den här uppgiften kommer följande överföringsfunktioner studeras:

$$G_1(s) = \frac{4}{(s+2)^2(s+1)} \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^2}e^{-s}$$
$$G_3(s) = \frac{3}{(s+2)^2} \qquad G_4(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}$$

a. I figur 1 visas fyra Nyquistdiagram. Para ihop varje diagram med motsvarande överföringsfunktion. Motivera ditt svar. (2 p)

b. Antag att systemen återkopplas med en P-regulator med förstärkning $K > 0$. För varje överföringsfunktion, vilka värden på K återkopplar systemet stabilt? Motivera dina svar. (2 p)



Figur 1: Nyquistdiagram för uppgift 3.

Solution

a. Överföringsfunktion G_2 har en tidsfördröjning, fasen går mot $-\infty$ då $\omega \to \infty$ och motsvarar därmed Nyquistdiagram **B**.

Överföringsfunktion G_3 har statisk förstärkning 0,75 (resten har statisk förstärkning 1) och motsvarar därmed Nyquistdiagram **A** där $|G(0)| = 0,75$ (systemet är stabilt).

Då $\omega \to \infty$ går fasförskjutningen från överföringsfunktion G_1 mot $(0-3)\frac{\pi}{2}$ vilket motsvarar Nyquistdiagram **D**.

Då $\omega \to \infty$ går fasförskjutningen från överföringsfunktion G_4 mot $(1-2)\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ vilket motsvarar Nyquistdiagram **C**.

b. Använd Nyquistkriteriet. Amplitudmarginalen ger den största möjliga förstärkningen K.

Överföringsfunktion G_1 (diagram **D**) skär negativa reella axeln vid ungefär 0,11, med punkten -1 till vänster, och kan därmed negativt återkopplas med $K \leq 9$.

Överföringsfunktion G_2 (diagram **B**) skär negativa reella axeln första gången vid ungefär 0,6, med punkten -1 till vänster, och kan därmed negativt återkopplas med $K \leq 1,7$.

Överföringsfunktion G_3 (diagram **A**) skär inte negativa reella axeln och kan därmed negativt återkopplas med alla K.

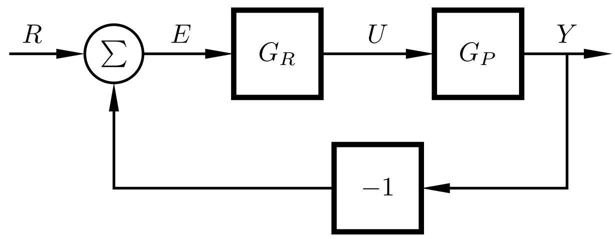
Överföringsfunktion G_4 (diagram **C**) skär inte negativa reella axeln och kan därmed negativt återkopplas med alla K.

4. Du är anställd som konsult på företaget Energi AB som jobbar med temperaturreglering av rum. De har hittat en modell för uppvärmning av ett rum som beskrivs av följande överföringsfunktion.

$$G_P(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+3s)}$$

a. Om du ska jämföra denna processen med tanklabbarna, har den motsvarande dynamik som den övre eller den nedre tanken? Motivera ditt svar! (0.5 p)

b. Företaget använder idag en PI-regulator för att styra det återkopplade systemet. Räkna ut överföringsfunktionen $G(s)$ från referensen R till mätsignalen Y för det återkopplade systemet (se figur 2). Sätt in uttrycken för G_P och G_R och gör så att du får ett snyggt uttryck för överföringsfunktionen (nämnarpolynomet ska vara på formen $s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n$). Överföringsfunktionen för en PI-regulator är: $G_R(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i})$. (2 p)



Figur 2: Återkopplat system.

c. Givet att $T_i = 1$, vilken är den största förstärkningen K som regulatorn kan ha för att det återkopplade systemet ändå ska vara asymptotiskt stabilt? (1 p)

d. Finns det någon annan typ av regulator som du vill rekommendera företaget att använda i stället för en PI-regulator? Varför/varför inte? (0.5 p)

Solution

a. Processen är ett andra ordningens system vilket är samma som den nedre tanken i labbprocesserna.

b. Med hjälp av blockdiagramsberäkningar kommer man fram till att överföringsfunktionen för det slutna systemet är $G(s) = \frac{G_P G_R}{1+G_P G_R}$ (*Notera att detta inte räcker som svar för att få full poäng på uppgiften.*).

Genom att sätta in uttrycken för $G_P(s)$ och $G_R(s)$ får vi fram det återkopplade systemets överföringsfunktion. För att göra kommande beräkningar lättare att följa skriver vi om regulatorns överföringsfunktion enligt följande: $G_R(s) = K(1+\frac{1}{sT_i}) = \frac{K(sT_i+1)}{sT_i}$

$$
\begin{aligned}
G(s) = \frac{G_P G_R}{1+G_P G_R} &= \frac{\frac{1}{(1+2s)(1+3s)}\frac{K(sT_i+1)}{sT_i}}{1+\frac{1}{(1+2s)(1+3s)}\frac{K(sT_i+1)}{sT_i}} = \\
&= \frac{K(sT_i+1)}{(1+2s)(1+3s)sT_i + K(sT_i+1)} = \frac{K(sT_i+1)}{(1+5s+6s^2)sT_i + K(sT_i+1)} = \\
&= \frac{K(sT_i+1)}{sT_i + 5T_is^2 + 6T_is^3 + KsT_i + K} = \frac{K(sT_i+1)}{6T_is^3 + 5T_is^2 + (T_i + KT_i)s + K} = \\
&= \frac{\frac{K}{6}(s+\frac{1}{T_i})}{s^3 + \frac{5}{6}s^2 + \frac{(1+K)}{6}s + \frac{K}{6T_i}}
\end{aligned}
$$

c. *Om man i föregående uppgift inte räknade ut hela uttrycket för $G(s)$ men har gjort det här får man ändå poäng på föregående uppgift.*

Om vi tittar på det karakteristiska polynomet $s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$ är systemet asymptotiskt stabilt om $a_1, a_2, a_3 > 0$ och $a_1a_2 > a_3$. Givet att $K > 0$ får vi följande:

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{6}\frac{(1+K)}{6} &> \frac{K}{6T_i} \\
\frac{5}{6}\frac{(1+K)}{6} &> \frac{K}{6} \\
\frac{(1+K)}{K} &> \frac{6}{5} \\
\frac{1}{K} + 1 &> \frac{6}{5} \\
\frac{1}{K} &> \frac{1}{5} \\
5 &> K
\end{aligned}
$$

K måste alltså vara mindre än 5 för att det återkopplade systemet ska vara asymptotiskt stabilt med en PI-regulator.

d. Från labb 1 och labb 2 i kursen har vi sett att en PID-regulator är bättre lämpad än PI-regulatorer för att styra andra ordningens system. En motivering för detta är att det återkopplade systemet har tre poler men med en PI-regulator har vi bara två parametrar att skruva på vilket inte är tillräckligt för att få bra reglering. Med en PID-regulator har vi tre parametrar och det blir generellt bättre reglering med en PID-regulator för ett andra ordningens system.

5. Du och din kollega Abigail jobbar med ett system beskrivet på tillståndsform som:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x
\end{aligned}
$$

a. Återkoppla systemet med tillståndsåterkoppling så att det karakteristiska polynomet blir $s^2 + 4s + 9$. (1 p)

b. Beskriv i ord varför man ofta behöver någon variant av Kalmanfilter när man gör tillståndsåterkoppling. (0.5 p)

Solution

a. Vi använder styrlagen $u = -Lx + l_r r$ för att återkoppla systemet. A-matristen för det återkopplade systemet blir då $A - BL$ och det är från denna vi hittar det karakteristiska polynomet.

$$A - BL = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -l_1 & -2 - l_2 \end{bmatrix}$$

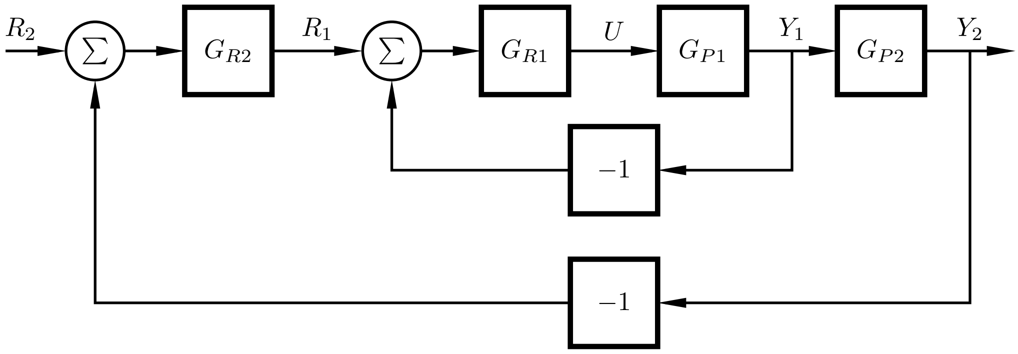
Det karakteristiska polynomet hittar vi genom.

$$|\lambda I - (A - BL)| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ l_1 & \lambda + 2 + l_2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2+l_2)+l_1 = \lambda^2+(3+l_2)\lambda+(2+l_1+l_2)$$

Vi identifierar parametrar och räknar ut $l_1 = 6$ och $l_2 = 1$.

b. Ofta kan man inte mäta alla tillståndsvariabler och då använder man ett Kalmanfilter för att skatta tillståndsvektorn så att det ändå går att göra en tillståndsåterkoppling.

6. Du och din kompis Yasmin jobbar med ett hemmaprojekt och har följande två blockdiagram som kandidater för att lösa ert nuvarande problem (se figur 3 och 4).



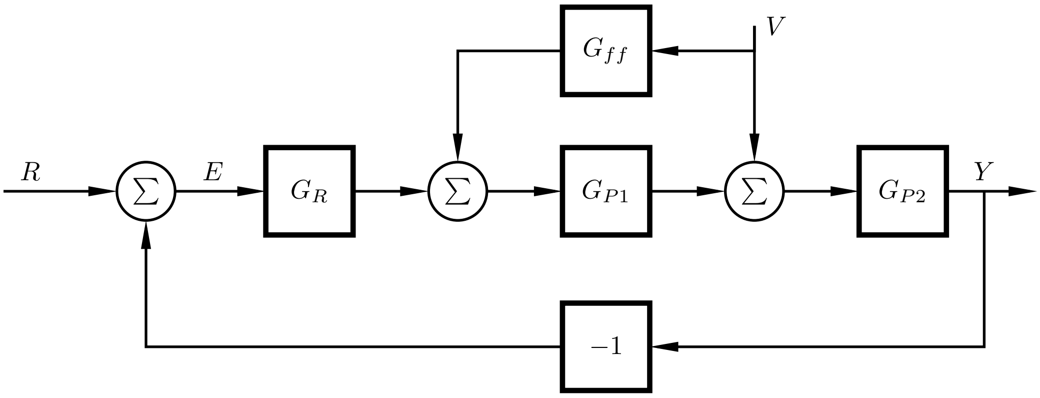
Figur 3: Blockdiagram A

a. Vad heter regulatorstrukturerna för de två olika blockdiagrammen? (0.5 p)

b. Ni har en mätbar laststörning som påverkar er mätsignal och som ni vill motverka. Är regulatorstruktur A eller B bäst lämpad då? (Motivering krävs för poäng!) (0.5 p)

c. Ert mål är att styra temperaturen i ett rum. Om ni bestämmer er för att använda regulatorstruktur A, är det R_1 eller R_2 som kommer vara referensen för temperaturen? (Motivering krävs för poäng!) (0.5 p)

d. Nämn ett problem och en lösning på detta problem som ni måste ta hänsyn till om ni väljer regulatorstruktur B. (0.5 p)



Figur 4: Blockdiagram B

Solution

a. A – Kaskadreglering
B – Framkoppling

b. Framkoppling (blockdiagram B) är vägen att gå för att motverka störningar. Störningen måste dock vara mätbar, om den inte är det så går det inte att göra framkoppling.

c. Det är R_2 som är referensen för temperaturen i rummet. Det vi får ut från systemet är Y_2 – rummets temperatur, denna signal jämför vi med R_2 – referensen för temperaturen, för att sedan räkna ut en styrsignal. R_1 skulle i detta fallet kunna vara temperaturen på elementen eller flödet av vatten till ett vattenburet element.

d. Ett problem kan vara att man i överföringsfunktionen G_{ff} får en ren derivatadel och således ska derivera störningen. Det kan ge upphov till störningskänslighet och stora styrsignaler. En lösning är att stryka derivatadelen helt och bara använda den statiska förstärkningen. En annan lösning är att lägga till ett lågpassfilter.

7. Du och din kollega Miyuki har fått i uppgift att justera regulatorn för en process. Till er hjälp har ni följande Bodediagram (se figur 5).

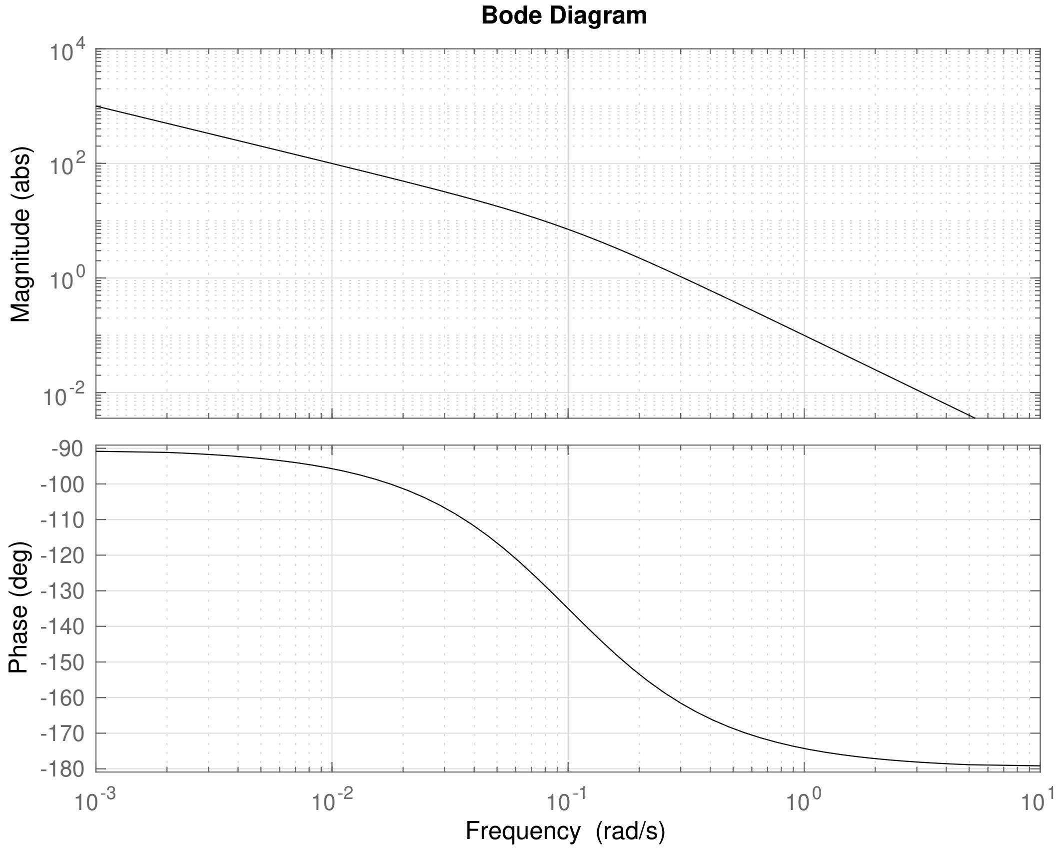
a. Vad är systemets fasmarginal och amplitudmarginal? (1 p)

b. Vad är det kortaste avståndet mellan Nyquistkurvan och punkten -1? (1 p)

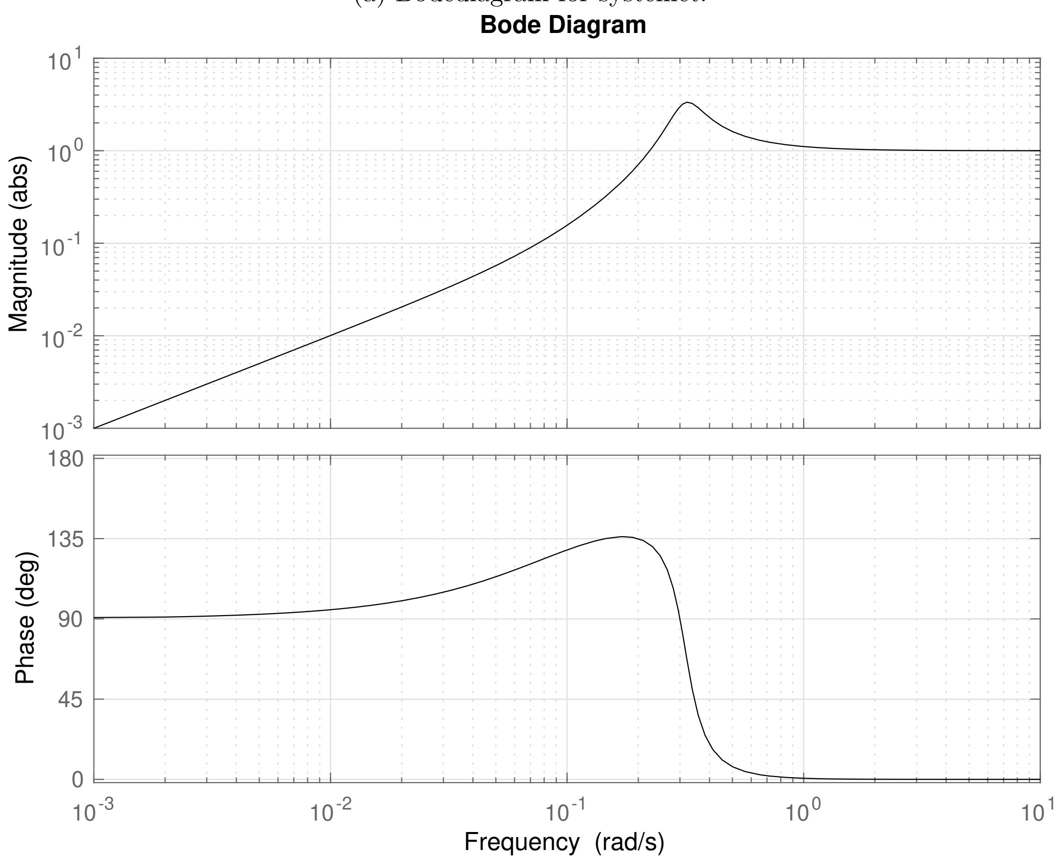
c. Ni bestämmer er för att designa en kompenseringslänk så att fasmarginalen blir $50°$ med bibehållen snabbhet. Räkna ut överföringsfunktionen för denna kompenseringslänk. (2.5 p)

Solution

a. Från bodediagrammet för systemet (figur 5a) ser vi att amplitudmarginalen är oändlig och fasmarginalen är lite mindre än $20°$ ($18°$ för att vara exakt).



(a) Bodediagram för systemet.



(b) Bodediagram för systemets känslighetsfunktion.

Figur 5: Bodediagram som ni har tillgängliga för ert system.

b. Känslighetsfunktionens största värde är inversen av det kortaste avståndet mellan Nyquistkurvan och punkten -1. Vi kollar i Bodediagrammet för känslighetsfunktionen (figur 5b) och avläser den högsta punkten som lite mer än 3 (3.35 för att vara exakt). Således är det kortaste avståndet ca $\frac{1}{3}$.

c. Eftersom vi vill öka fasmarginalen så väljer vi en fasavancerande länk. Skärfrekvensen är $\omega_c = 0.3$ rad/s och denna ska behållas. Fasmarginalen behöver ökas med ca $30°$, detta ger oss att $N = 3$. Därefter räknar vi ut b från $\omega_c = b\sqrt{N} \to b = \frac{0.3}{\sqrt{3}} \approx 0.1732$. Slutligen räknar vi ut länkens förstärkning K_K. Vi vill att det slutliga systemet ska ha en förstärkning på 1 vid ω_c. Systemet har just nu en förstärkning på 1 vid denna frekvens, alltså vill vi att kompenseringslänkens förstärkning också ska vara 1. Detta ger oss $K_K\sqrt{N} = 1 \to K_K = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774$. Allt som allt får vi en kompenseringslänk som är $G_K(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} 3 \frac{s+\frac{0.3}{\sqrt{3}}}{s+\frac{0.3}{\sqrt{3}}3} = \sqrt{3}\frac{s+\frac{0.3}{\sqrt{3}}}{s+0.3\sqrt{3}}$.