LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 8 april 2021, 08:00–13:00

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsnivåer:

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Allt kursmaterial, annat material, samt datorhjälpmedel är tillåtet (inklusive föreläsningsanteckningar, övningsmaterial, Matlab, ...) men inget samarbete eller kommunikation.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Ett system är representerat av följande differentialekvation:

$$2\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + 8y(t) = 0.2\dot{u}(t) + 10u(t).$$

a. För vilka värden på b är systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

b. För vilka värden på $b > 0$ har systemet komplexa poler? (1 p)

c. Låt $b = 8$. Rita Bodediagrammet till systemet (både amplitud- och fasdiagram). (2 p)

Solution

Vi dividerar med 2 och Laplacetransformerar:

$$s^2Y(s) + s\frac{b}{2}Y(s) + 4Y(s) = s\frac{1}{10}U(s) + 5U(s).$$

Överföringsfunktionen blir:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.1s + 5}{s^2 + 0.5bs + 4}$$

a. Ett system med karaketeristiskt polynom $s^2 + a_1s + a_2$ är asymptotiskt stablt om $a_1 > 0$ and $a_2 > 0$. Systemet är därför asymptotiskt stabilt $\forall b > 0$.

b. Polerna ges av att lösa $s^2 + 0.5bs + 4 = 0$. Vi får

$$s = -\frac{b}{4} \pm \sqrt{-4 + \frac{b^2}{16}}$$

Vi ser från uttrycket under roten att polerna blir imaginära när $-4 + \frac{b^2}{16} < 0$. Alltså resulterar $|b| < 8$ i komplex-värda poler.

c. För $b = 8$ kan det karakteristiska polynomet skrivas som:

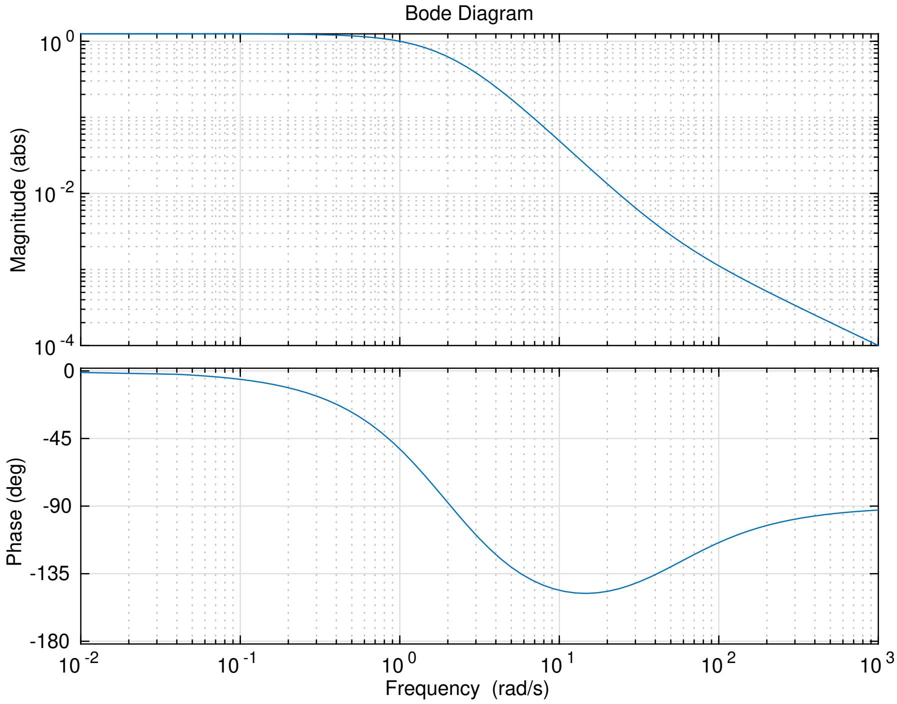
$$s^2 + 4s + 4 = (s + 2)^2,$$

vilket ger överföringsfunktion:

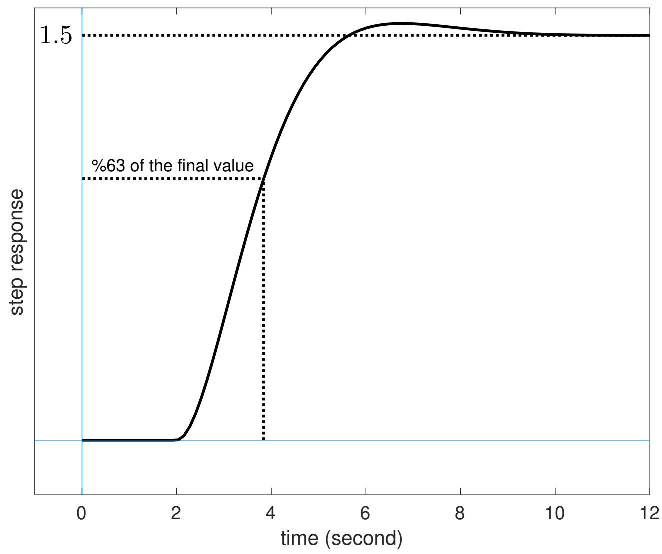
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 0.1\frac{s + 50}{(s + 2)^2}.$$

Förstärkningen kommer därför (approximativt) ha lutning 0 för $\omega < 2$, lutning -2 för $2 < \omega < 50$ och lutning -1 för $\omega > 50$. Lågfrekvensasymptoten ges av $G(0) = \frac{5}{4} = 1.25$. Fasdiagrammet kommer börja vid $0°$ och träffa $-90°$ vid ungefär $\omega = 2$. Fasen kommer gå nedåt mot $-180°$ med kommer inte hela vägen då nollstället tar tillbaka fasen till $-90°$ för stora ω. Se figur 1.

2. Stegsvaret (efter enhetssteg) för ett system visas i figur 2. Bestäm parametrarna för en PID regulatur med hjälp av Lambda metoden med $\lambda = T$, där T är den uppskattade tidskonstanten. (2 p)



Figur 1 Bodediagram för uppgift **1c**.



Figur 2 Stegsvar för systemet i uppgift **2**.

Solution

Vi får en approximativ dödtid på $L \simeq 2.35$. Stegsvaret har nått 63 procent av sitt slutvärde efter ungefär 3.85 sekunder. Tidskonstanten blir därför $T \simeq 3.85 - 2.35 = 1.5$. Den statiska förstärkningen $K_p = 1.5$. Med $\lambda = T$ blir PID parametrarna

$$K = 0.66 \qquad T_i = 2.67 \qquad T_d = 0.66.$$

3. Matcha följande överföringsfunktioner med deras Nyquistkurvor i figur 3. Motivera dina svar. (2 p)

$$G_1(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2} \qquad G_2(s) = \frac{2e^{-s}}{s+1}$$
$$G_3(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)^2} \quad G_4(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

Solution

G_1: Fasen måste börja vid $0°$ och sluta vid $-90°$, då vi vid stora frekvenser får $-180°$ bidrag från nämnaren och $+90°$ bidrag från täljaren. Därför matchar G_1 med F.

G_2: På grund av fördröjningen ska Nyquistkurvan vara en spiral. Eftersom vi inte har någon integrator i överföringsfunktionen ska fasen börja vid $0°$. Dessutom ska amplitude vid frekvens 0 vara 2. Därför matchar G_2 med A.

G_3: Detta är ett tredje ordningens system utan integrator, så fasen ska börja vid $0°$ och sluta vid $-270°$ (tangera positiva imaginär axeln). Därför matchar G_3 med B.

G_4: Integratorn i överföringsfunktionen gör att Nyquistkurvan ska börja vid $-90°$. Vi har ingen fördröjning i överföringsfunktionen och förväntar oss därför inte någon spiral. Därför matchar G_4 med C.

4. Betrakta systemet

$$\ddot{y} + (y+1)\dot{y} + y^2 = u.$$

a. Introducera tillståndsvariabler $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Hitta alla stationär punkter (x_1^*, x_2^*, u^*) för systemet. (1 p)

c. Linjärisera systemet runt den stationära punkten där $x_1^* = 2$. (2 p)

Solution

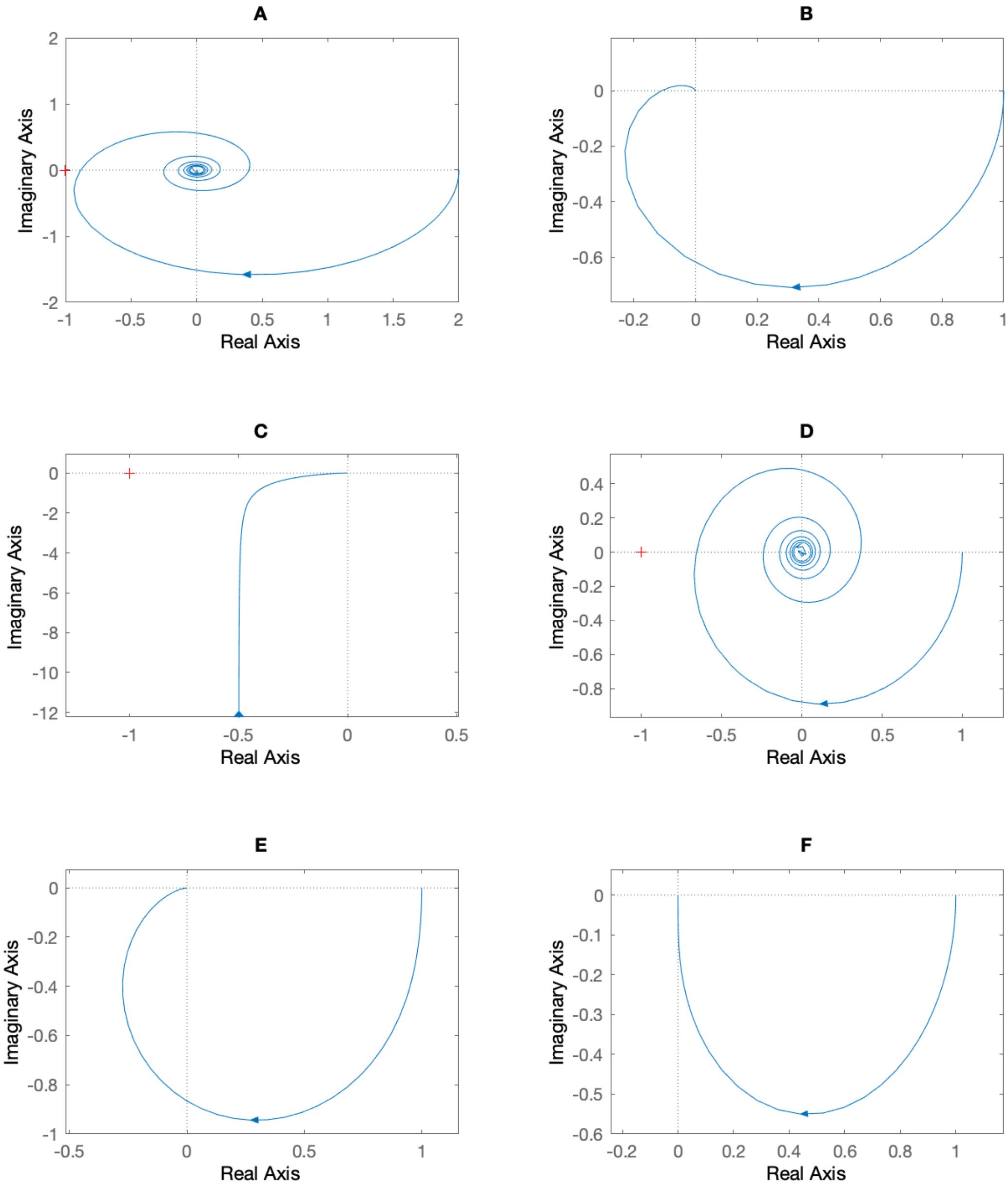
a. Med $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ får vi följande tillståndsbeskrivning:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 := f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= -(x_1+1)x_2 - x_1^2 + u := f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= x_1 := g(x_1, x_2, u) \end{aligned}$$

b. Alla punkter med $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$ och $\dot{u} = 0$ är stationära. Insättning i tillståndsformen ger:

$$\begin{cases} 0 = x_2^* \\ 0 = -(x_1^*+1)x_2^* - (x_1^*)^2 + u^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 \\ (x_1^*)^2 = u^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 \\ x_1^* = \pm\sqrt{u^*} \end{cases}$$

Alltså är $x_2^* = 0$ för alla stationära punkter och $x_1^* = \pm\sqrt{u^*}$, vilket innebär att u^* måste vara icke negativ.



Figur 3 Nyquistkurvor för uppgift **3**.

c. Om $x_1^* = 2$ får vi $u^* = 4$. Vidare ger $x := (x_1, x_2)$ och $f := (f_1, f_2)$:

$$\dot{x} = f(x, u) \approx f(x^*, u^*) + \frac{\partial f(x^*, u^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, u^*)}{\partial u}(u - u^*)$$
$$y = g(x, u) \approx g(x^*, u^*) + \frac{\partial g(x^*, u^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, u^*)}{\partial u}(u - u^*)$$

där

$$f(x^*,u^*) = \begin{bmatrix} f_1(x^*,u^*) \\ f_2(x^*,u^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x^*,u^*) = x_1^* = y^* = 2$$

och

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x^*,u^*)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*,u^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*,u^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^*,u^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*,u^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x_2^* - 2x_1^* & -x_1^* - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial f(x^*,u^*)}{\partial u} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*,u^*)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x^*,u^*)}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial g(x^*,u^*)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x^*,u^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x^*,u^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial g(x^*,u^*)}{\partial u} &= 0
\end{aligned}$$

Vi introducerar $\Delta x = x - x^*$, $\Delta y = y - y^*$ och $\Delta u = u - u^*$. Detta ger $\dot{\Delta x} = \dot{x}$ och tillståndsbeskrivningen blir

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \\
\Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x.
\end{aligned}$$

5. I den här uppgiften betraktar vi följande system:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.
\end{aligned}$$

a. Ifall systemet initieras i tillståndet $x(0) = (3,7)^T$ och styrsignalen är konstant $u(t) = 0$, kommer det då att gälla att $x(t) \to 0$ när $t \to \infty$? Motivera ditt svar. (1 p)

b. Ifall systemet initieras i tillståndet $x(0) = (0,0)^T$, går det då att välja en styrsignal $u(t)$ (som inte behöver vara konstant) så att $x(\tau) = (3,7)^T$ vid någon ändlig tidpunkt $\tau > 0$? Motivera ditt svar. (1 p)

c. Antag att vi kan mäta värdet på båda systemets tillståndsvariabler x_1 och x_2 och att vi vill reglera systemet med en styrlag $u(t) = -l_1 x_1 - l_2 x_2 + l_r r$ för några konstanter l_1, l_2 och l_r. Bestäm värdena på l_1, l_2 och l_r så att det slutna systemet, d.v.s. systemet från referenssignalen r till mätsignalen y, får två poler i $s = -3$ och statisk förstärkning 1. (3 p)

Solution

a. Svar: Ja. Egenvärdena för systemmatrisen A är $\lambda = -2, -3$, vilket innebär att systemets poler är $s = -2, -3$. Att alla poler ligger strikt i vänster halvplan implicerar att systemet är **asymptotiskt stabilt**. Detta innebär per definition att för ett godtyckligt initialtillstånd $x(0)$ kommer det gälla att $x(0) \to 0$ när $t \to \infty$ då $u(t) = 0$.

b. **Svar: Ja.** Att ett system är **styrbart** innebär att ifall det startas i ett initialtillstånd $x(0)$ så kan en styrsignal $u(t)$ väljas så att systemet når ett godtyckligt tillstånd $x(\tau)$ vid någon ändlig tidpunkt τ. Styrbarhetsmatrisen för systemet är

$$W_s = [\,B \quad AB\,] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Denna har två linjärt oberoende kolonner, vilket implicerar att systemet är styrbart.

c. Systemet ges av

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \\ y &= [\,1 \quad 0\,]\, x = Cx \end{aligned} \tag{1}$$

Vi vill bestämma en tillståndsåterkoppling $u(t) = l_r r(t) - Lx(t)$, där $L = [\,l_1 \quad l_2\,]$, så att det slutna systemet (systemet från r till y) får polpolynomet

$$(s+3)^2 = s^2 + 6s + 9. \tag{2}$$

Insättning av styrlagen i (1) ger oss det slutna systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_r r \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Polerna till systemet är desamma som egenvärdena till matrisen $A - BL$, vilka ges av nollställena till det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} p(s) = \det(sI - (A - BL)) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} [\,l_1 \quad l_2\,] \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 2l_1 & s+3+2l_2 \end{bmatrix} = s^2 + (5 + 2l_2)s + 6 + 4l_2 + 2l_1. \end{aligned}$$

Vi ska välja parametrarna l_1 och l_2 i vår styrlag så att detta polpolynom är lika med det specificerade polpolynomet (2). Identifiering av koefficienterna ger att detta är uppfyllt om

$$\begin{cases} 5 + 2l_2 = 6 \\ 6 + 2l_1 + 4l_2 = 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} l_1 = 1/2 \\ l_2 = 1/2 \end{cases}.$$

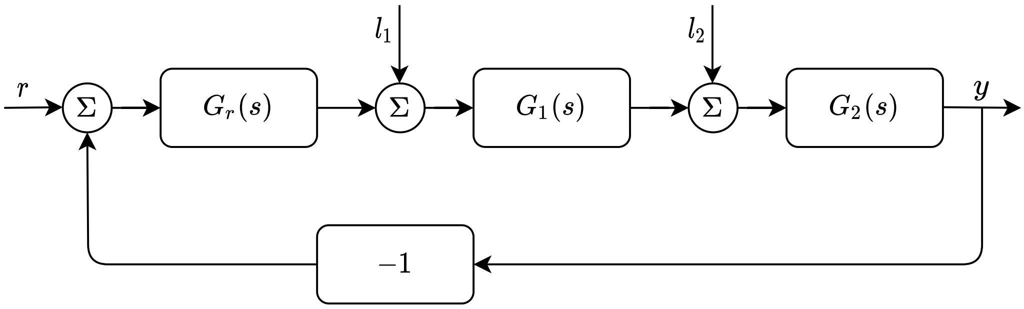
Den statiska förstärkningen ges av $G(0)$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet är

$$G(s) = C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} l_r.$$

Vi får då

$$G(0) = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} l_r = [\,1 \quad 0\,] \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} l_r = \frac{2l_r}{9},$$

och kravet att den statiska förstärkningen ska vara 1, $G(0) = 1$, är alltså uppfyllt ifall vi väljer $l_r = 9/2$.



Figur 4 Blockdiagram till uppgift **6**.

6. En process $G_p(s)$ består av två komponenter, så att $G_p(s) = G_2(s)G_1(s)$. Vi vill reglera denna process med en regulator $G_r(s)$. Laststörningar kan uppstå antingen innan den första komponenten $G_1(s)$ eller mellan de två komponenterna $G_1(s)$ och $G_2(s)$. Blockdiagrammet för det slutna systemet visas i figur 4. Antag att vi väljer en PD-regulator med $T_d = 1/K$ och K som uppfyller $0 < K < 1$ och att systemets komponenter då är

$$G_r(s) = K + s, \quad G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s}.$$

Vi antar också att referenssignalen $r(t) = 0$ för alla tider t.

a. Beräkna överföringsfunktionen från laststörningen l_1 till mätsignalen y. (1 p)

b. Beräkna överföringsfunktionen från laststörningen l_2 till mätsignalen y. (1 p)

c. Vad blir $y(t)$ då $t \to \infty$ ifall $l_1(t)$ är ett enhetssteg och $l_2(t) = 0$? (1 p)

d. Vad blir $y(t)$ då $t \to \infty$ ifall $l_1(t) = 0$ och $l_2(t) = t$? (1 p)

e. Vad blir $y(t)$ då $t \to \infty$ ifall $l_1 = \sin t$ och $l_2 = 0$? (Kom ihåg att $0 < K < 1$.) (2 p)

Solution

a. Vi kan sätta övriga externa signaler till noll vid beräkning av överföringsfunktionen, d.v.s. $r = 0$ och $l_2 = 0$. Vi får då

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)[L_1(s) + G_r(s)(-Y(s))] \Rightarrow Y(s) = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)G_r(s)}L_1(s),$$

så den sökta överföringsfunktionen är alltså

$$\frac{Y(s)}{L_1(s)} = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)G_r(s)} = \frac{1/(s^2(s+1))}{1 + (K+s)/(s^2(s+1))} = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + K}$$

b. Vi kan sätta övriga externa signaler till noll vid beräkning av överföringsfunktionen, d.v.s. $r = 0$ och $l_1 = 0$. Vi får då

$$Y(s) = G_2(s)[L_2(s) + G_1(s)G_r(s)(-Y(s))] \Rightarrow Y(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)G_r(s)}L_2(s),$$

så den sökta överföringsfunktionen är alltså

$$\frac{Y(s)}{L_2(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)G_r(s)} = \frac{1/s}{1 + (K+s)/(s^2(s+1))} = \frac{s(s+1)}{s^3 + s^2 + s + K}$$

c. Att l_1 är ett enhetssteg innebär att $L_1(s) = \frac{1}{s}$. Slutvärdessatsen ger att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)G_r(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^3 + s^2 + s + K} = \frac{1}{K}.$$

Satsens resultat är giltigt eftersom systemet som gränsvärdet beräknas för är asymptotiskt stabilt. Detta följer av att polpolynomet $s^3 + s^2 + s + K$ har positiva koefficienter för alla termer, samt uppfyller $a_1 a_2 = 1 \cdot 1 > a_3 = K$.

d. Att $l_2(t) = t$ innebär att $L_2(s) = \frac{1}{s^2}$. Slutvärdessatsen ger att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)G_r(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s + K} = \frac{1}{K}.$$

Satsens resultat är giltigt eftersom systemet som gränsvärdet beräknas för är asymptotiskt stabilt. Detta följer av att polpolynomet $s^3 + s^2 + s + K$ har positiva koefficienter för alla termer, samt uppfyller $a_1 a_2 = 1 \cdot 1 > a_3 = K$.

e. Att $l_1(t) = \sin t$ innebär att $L_1(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Vi får då

$$sY(s) = s \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)G_r(s)} \frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{(s^3 + s^2 + s + K)(s^2+1)}.$$

Faktorn $(s^2 + 1)$ i polpolynomet innebär att vi har två poler på den imaginära axeln. Systemet är således inte asymptotiskt stabilt, och slutvärdessatsen kan inte användas. Vi vet däremot att ett linjärt tidsinvariant system som har en sinussignal som insignal alltid får en sinussignal som utsignal, med samma frekvens ω men med amplituden multiplicerad med $|G(i\omega)|$ och med en fasförskjutning $\arg G(i\omega)$. I det här fallet får vi

$$G(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^3 + (i\omega)^2 + i\omega + K} = \frac{1}{K - \omega^2 + i(\omega - \omega^3)}.$$

Insättning av $\omega = 1$ ger $G(i1) = 1/(K-1)$, så utsignalen blir alltså

$$y(t) = |G(i1)| \sin(t + \arg G(i1)) = \frac{1}{|K-1|} \sin(t - \pi) = \frac{1}{K-1} \sin t,$$

eftersom $K < 1$.

7. Betrakta följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{Ke^{-s}}{s(s+2)}.$$

Antag att vi sluter loopen med negativ återkoppling med förstärkning 1 (som ger en sluten överföringsfunktion $G_{\text{cl}}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$). Genom att följa nedanstående steg, hitta en övre gräns $\bar{K} > 0$ för vilka alla K som uppfyller $0 < K < \bar{K}$ ger ett stabilt återkopplat system.

a. Hitta uttryck som beskriver fas och amplitud for $G(i\omega)$, alltså $\arg G(i\omega)$ och $|G(i\omega)|$. (0.5 p)

b. Beräkna ω_0 som uppfyller $\arg G(i\omega_0) = -\pi$. (Hint: Du kan använda Matlab för att lösa den resulterande olinjära ekvationen.) (0.5 p)

c. Beräkna K så att $|G(i\omega_0)| = 1$. (0.5 p)

d. Baserat på **c.**, ge en övre gräns $\bar{K} > 0$ för vilka alla K som uppfyller $0 < K < \bar{K}$ ger ett stabilt återkopplat system. (0.5 p)

Solution

a. Uttrycket som beskriver fasen av $G(i\omega)$ är

$$\arg G(i\omega) = \frac{-\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{\omega}{2}) - \omega$$

och uttrycket som beskriver amplituden av $G(i\omega)$ är

$$|G(i\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{4+\omega^2}}$$

b.

$$\begin{aligned} \arg G(i\omega_0) &= \frac{-\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{\omega_0}{2}) - \omega_0 = -\pi \\ \Rightarrow \qquad \frac{\omega_0}{2} &= \tan(\pi/2 - \omega_0) \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = 1.077\text{rad/s} \end{aligned}$$

c.

$$|G(i\omega_0)| = \frac{K}{\omega_0\sqrt{4+\omega_0^2}} = 0.4088K = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K = 2.4465$$

d. Nyquistkurvan skär -1 för första gången vid $K = 2.4465$. Eftersom inga poler ligger i höger halvplan och polen i origo är unik ger Nyquistkriteriet att $\bar{K} = 2.4465$.