LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 17 mars 2021, 08:00–13:00

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsnivåer:

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Allt kursmaterial, annat material, samt datorhjälpmedel är tillåtet (inklusive föreläsningsanteckningar, övningsmaterial, Matlab, ...) men inget samarbete eller kommunikation.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Ett system beskrivs av följande differentialekvation

$$\ddot{y} + \dot{y} + \sin y = u.$$

a. Inför tillståndsvariablerna $x_1 = y$ samt $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Bestäm alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) för systemet för vilka $u^0 = 1$. (1 p)

c. Linjärisera systemet kring den stationära punkt med minsta positiva värde på x_1^0. (1 p)

Solution

a. Med tillståndsvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ får vi tillståndsformen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 =: f_1(x_1, x_2, u) \\
\dot{x}_2 &= -x_2 - \sin x_1 + u =: f_2(x_1, x_2, u) \\
y &= x_1 =: g(x_1, x_2, u).
\end{aligned}$$

b. Stationära punkter är de punkter för vilka $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$, d.v.s. de punkter som uppfyller

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -x_2 - \sin x_1 + u. \end{cases}$$

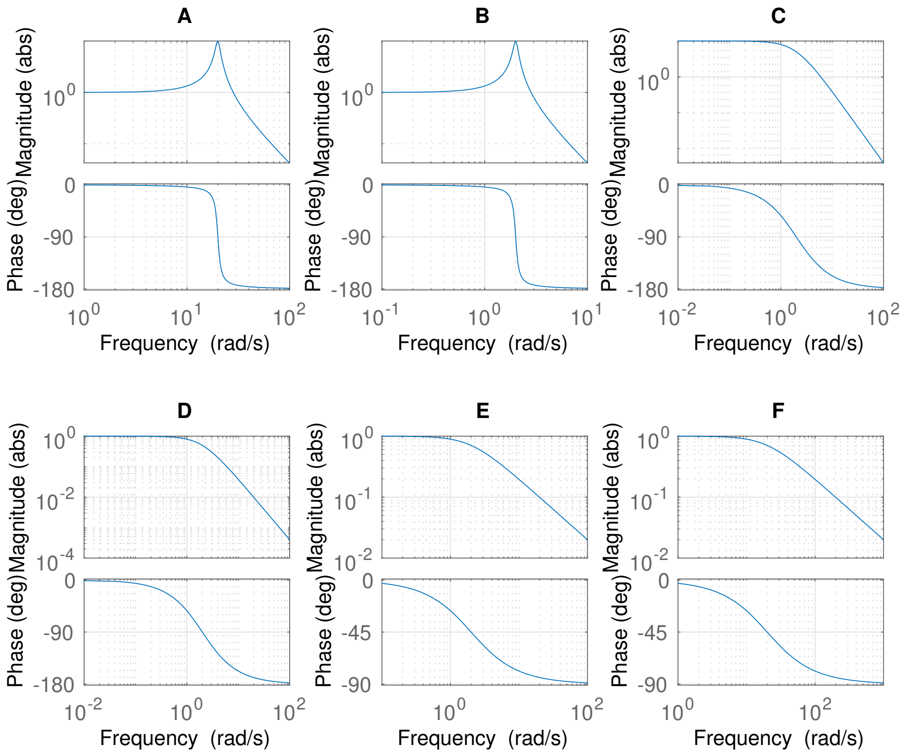
Samtliga sådana punkter med $u^0 = 1$ ges av $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 0, 1)$, för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

c. Den stationära punkt med minst positivt värde på x_1^0 är $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (\frac{\pi}{2}, 0, 1)$. De partiella derivatorna för systemekvationerna blir

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0, \\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\cos x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1, \\
&\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.
\end{aligned}$$

Med $x = [x_1 \quad x_2]^T$ inför vi variablerna $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$, vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta x + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \\
\Delta y &= \left[\tfrac{\partial g}{\partial x_1} \quad \tfrac{\partial g}{\partial x_2} \right]\Big|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta u = [1 \quad 0]\, \Delta x.
\end{aligned}$$



Figur 1 Bodediagram till uppgift 2.

2. Betrakta följande tre system:

$$G_\alpha(s) = \frac{20}{s+20}, \quad G_\beta(s) = \frac{4}{(s+2)^2},$$
$$G_\gamma(s) = \frac{1}{(1+s/(1-20i))(1+s/(1+20i))}.$$

a. Ange vilket av Bodediagrammen A-F i figur 1 som tillhör var och en av de tre överföringsfunktionerna. Motivera dina svar. (1.5 p)

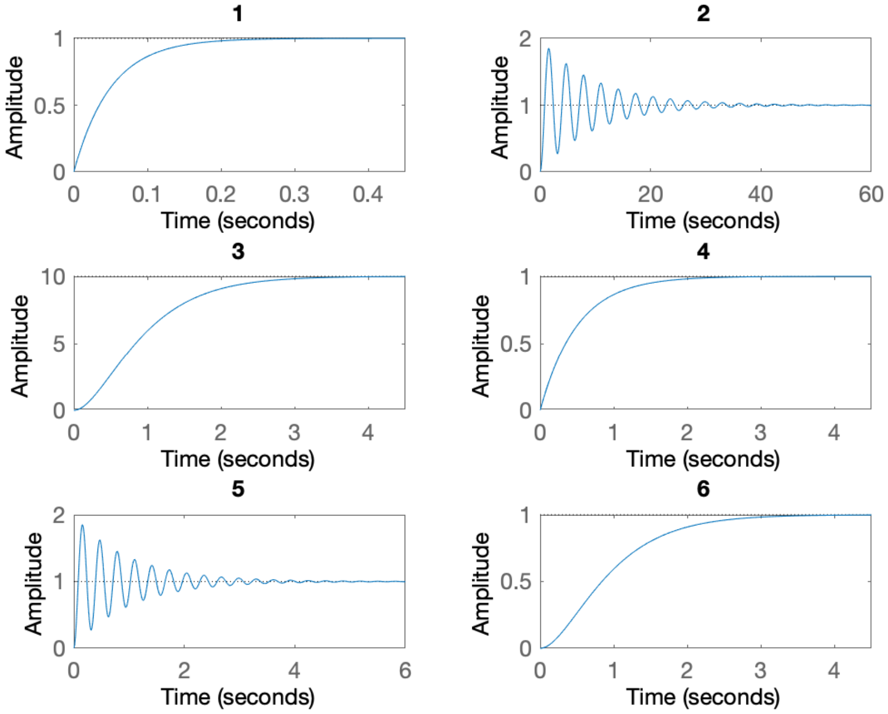
b. Ange vilket av stegsvaren 1-6 i figur 2 som tillhör var och en av de tre överföringsfunktionerna. Motivera dina svar. (1.5 p)

c. Ange vilken av de tre överföringsfunktionerna som beskrivs av Nyquistdiagrammet i figur 3. Motivera ditt svar. (1 p)

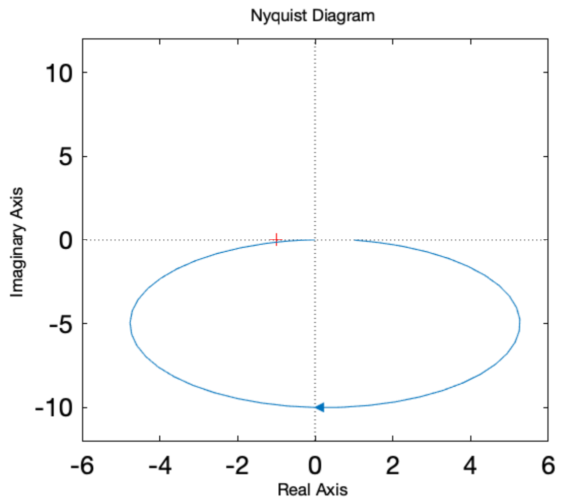
Solution

a. $G_\alpha(s)$ är ett första ordningens system, vilket innebär att faskurvan inte kan gå lägre än till $-90°$. Detta måste alltså motsvara E eller F. Polen i $s = -20$ motsvarar en brytfrekvens $\omega = 20$ i Bodediagrammet, vilket vi har för diagram F. Vi har alltså $G_\alpha(s) \leftrightarrow$ **F**.

$G_\beta(s)$ är ett andra ordningens system med reella poler. Eftersom vi har två poler och inga nollställen måste faskurvan gå ner till $-180°$. Diagrammen E och F kan alltså uteslutas. I A och B ser vi tydliga resonanstoppar, vilket kräver



Figur 2 Stegsvar till uppgift 2.



Figur 3 Nyquistdiagram till uppgift 2.

komplexa poler med stor imaginärdel. Dessa kan alltså också uteslutas. Den statiska förstärkningen ges av $G(0)$, och vi ser att $G_\beta(0) = 1$. Det av diagrammen C och D som har statisk förstärkning (förstärkning vid låga frekvenser) 1 är D, så vi har alltså $G_\beta(s) \leftrightarrow$ **D**.

$G_\gamma(s)$ är ett andra ordningens system med två komplexkonjugerade poler med stor imaginärdel. Att imaginärdelen är stor i förhållande till realdelen innebär att systemet är resonant, och detta kan ses som en resonanstopp i Bodediagrammet. Systemet måste alltså motsvara A eller B. Då den relativa dämpningen ζ för det komplexkonjugerade polparet är nära noll ges systemets resonansfrekvens approximativt av polernas avstånd till origo: $\omega_0 = \sqrt{(-1)^2 + 20^2} \approx 20$. Systemet har alltså en resonansfrekvens på omkring 20 rad/s, vilket är resonanstoppens placering i diagram A. Vi har således $G_\gamma(s) \leftrightarrow$ **A**.

b. Systemet $G_\alpha(s)$ är av första ordningen och har därmed inga komplexa poler. Eftersom det inte heller har några nollställen kan vi inte få några svängningar i stegsvaret, och stegsvaren 2 och 5 kan därmed uteslutas. För ett första ordningens system är derivatan av stegsvaret vid $t = 0$ nollskild. Detta kan exempelvis visas med begynnelsevärdessatsen. Därmed kan 3 och 6 uteslutas. Alternativt kan vi slå upp funktionen för stegsvaret i formelsamlingen som den inversa Laplacetransformen av $Y(s) = \frac{20}{s+20}\frac{1}{s}$, vilken är $y(t) = 1 - e^{-20t}$, och konstatera att derivatan $\dot{y}(t) = 20e^{-20t}$ är strikt avtagande, vilket också utesluter 3 och 6. Tidskonstanten för systemet är $T = 1/20$, och detta är tiden det tar stegsvaret att nå cirka 63% av sitt slutvärde (vilket följer av $y(T) = 1 - e^{-20T} = 1 - e^{-1} \approx 0.63$). Detta borde alltså ta 0.05 sekunder, och vi ser då att $G_\alpha(s) \leftrightarrow$ **1**.

$G_\beta(s)$ är ett andra ordningens system med reella poler. Eftersom det saknar nollställen och har två poler ger begynnelsevärdessatsen att initialderivatan är 0. Vi kan då utesluta 1 och 4. Eftersom vi bara har reella poler och inga nollställen kan vi inte få någon översläng, och 2 och 5 kan därför uteslutas. Den statiska förstärkningen är $G_\beta(0) = 1$, så stegsvarets stationära värde ska vara 1. Därmed måste vi ha $G_\beta(s) \leftrightarrow$ **6**.

Eftersom $G_\gamma(s)$ är ett kraftigt resonant system bör vi se svängningar i stegsvaret. Stegsvaret är alltså 2 eller 5. Svängningsfrekvensen bör motsvara resonansfrekvensen. I 5 ser vi att stegsvaret svänger med cirka 6.5 perioder på 2 sekunder, vilket ger frekvensen $f = 6.5/2 = 3.25$ Hz. Vinkelfrekvensen är då $\omega = 2\pi f \approx 20$ rad/s. Motsvarande beräkning för 2 ger en vinkelfrekvens som är en tiondel så stor. Vi måste alltså ha $G_\gamma(s) \leftrightarrow$ **5**.

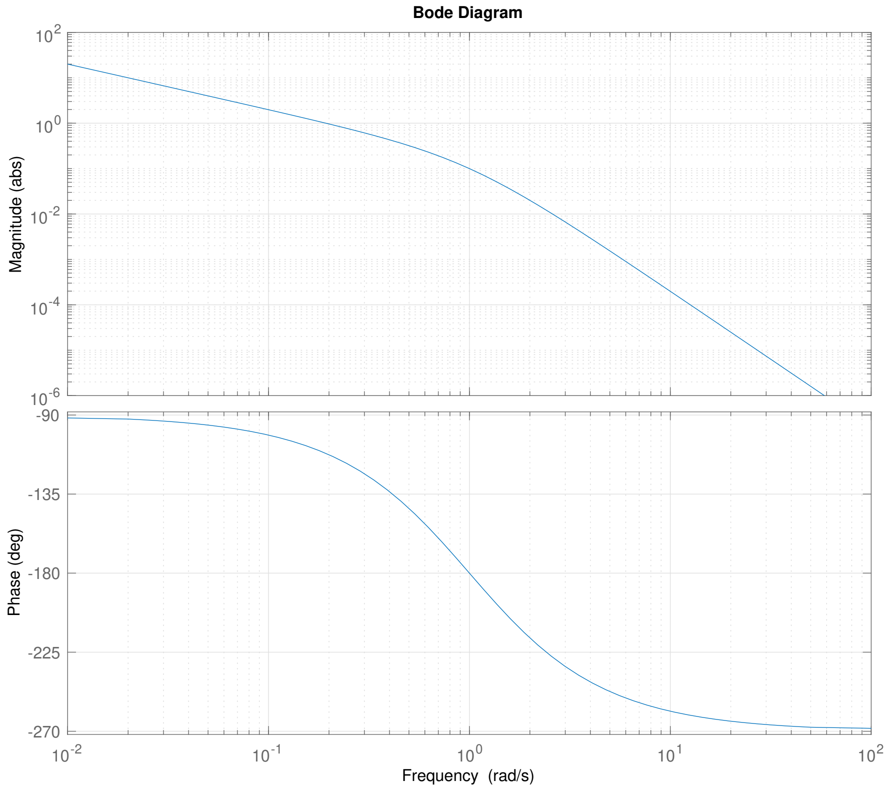
c. Den enda av överföringsfunktionerna som har en förstärkning $|G(i\omega)| > 1$ för något ω är $G_\gamma(s)$, på grund av resonanstoppen. Eftersom avståndet från origo till en del punkter på Nyquistkurvan är större än 1 måste Nyquistkurvan alltså motsvara systemet $G_\gamma(s)$.

3. Ett slutet system (enkel återkoppling) har en kretsöverföringsfunktion (alltså öppet system) $G_0(s)$ utan poler i höger halvplan vars Bodediagram visas i figur 4. Ange huruvida vart och ett av påståendena nedan är sant eller falskt, och motivera dina svar.

a. Det öppna systemet $G_0(s)$ har en pol i $s = 0$. (0.5 p)

b. Det öppna systemet $G_0(s)$ innehåller en integrator. (0.5 p)

c. Det öppna systemet $G_0(s)$ innehåller en dödtid. (0.5 p)



Figur 4 Bodediagram för öppet system G_0 i uppgift 3.

d. Det öppna systemet har minst tre poler. (0.5 p)

e. Ifall $G_0(s)$ ersätts med $5G_0(s)$ så blir det slutna systemet instabilt. (0.5 p)

f. Ifall det i $G_0(s)$ tillkommer en dödtid på 3 sekunder så blir det slutna systemet instabilt. (0.5 p)

Solution

a. **Sant.** Vi ser att förstärkningskurvan går mot oändligheten när $\omega \to 0$, ekvivalent att lågfrekvensasymptoten har negativ lutning. Detta innebär att vi har en pol i $s = 0$, eftersom faktorn $1/s$ i överföringsfunktionen ger en faktor $1/\omega$ i förstärkningen $|G(i\omega)|$, vilket krävs för att förstärkningen ska kunna gå mot oändligheten när $\omega \to 0$.

b. **Sant.** En pol i $s = 0$ är ekvivalent med att systemet innehåller en integrator.

c. **Falskt.** En dödtid ger en faskurva som går mot $-\infty$ för höga frekvenser, men faskurvan går inte lägre än till $-270°$.

d. **Sant.** Varje pol kan minska fasen med som mest $90°$. Eftersom fasen minskar till $-270°$ måste vi alltså ha minst tre poler (eftersom systemet inte har någon dödtid, vilket vore det andra sättet att minska fasen). Alternativt kan vi se att förstärkningskurvan har lutningen -3 vid höga frekvenser, vilket kräver minst tre poler, även ifall systemet skulle ha dödtid.

e. **Falskt.** Vi kan beräkna systemets amplitudmarginal som $A_m = 1/|G_0(i\omega_0)| \approx 1/0.1 = 10$, där ω_0 är den frekvens för vilken $\arg G_0(i\omega_0) = -180°$. Eftersom amplitudmarginalen är 10 så kan vi multiplicera $G_0(s)$ med en positiv konstant som är mindre än 10 utan att det slutna systemet blir instabilt.

f. **Falskt.** Systemets dödtidsmarginal ges av $L_m = \varphi_m/\omega_c$, där ω_c är skärfrekvensen, d.v.s. den frekvens för vilken $|G_0(i\omega_c)| = 1$ och $\varphi_m = \pi - |\arg G_0(i\omega_c)|$ är fasmarginalen. Vi ser att $\omega_c \approx 0.2$ och fasmarginalen är ungefär $\varphi_m = (3/4)\cdot(\pi/2) = 3\pi/8$. Vi får då $L_m \approx (3\pi/8)/0.2 \approx 5.9$, så dödtidsmarginalen är cirka 6 sekunder, vilket innebär att vi kan lägga till en dödtid på 3 sekunder utan att systemet blir instabilt.

4. Betrakta blockdiagrammet i figur 5.

a. Hitta överföringsfunktionerna från d till u och från n till u. (1 p)

b. Vi kan skriva utsignalen y som

$$y = G_{y/r}r + G_{y/d}d + G_{y/n}n.$$

Hitta överföringsfunktionerna $G_{y/r}$, $G_{y/d}$ och $G_{y/n}$. (1.5 p)

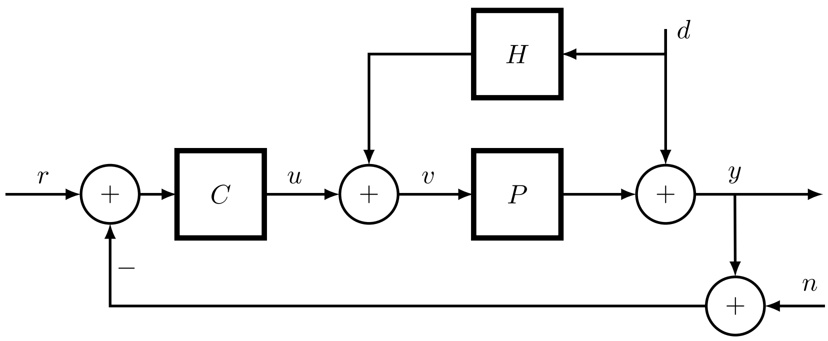
c. Låt $d = 0$, $n = 0$ och

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 2} \qquad C(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s}).$$

Hitta interval av K och T_i så att det slutna systemet är stabilt. (2 p)

d. Låt $K = 4$, $T_i = 10$ och $H = 0$. Vad är det stationära värdet på y när alla insignaler är enhetssteg, alltså $r(t) = d(t) = n(t) = 1$ för alla $t \geq 0$. (1.5 p)

e. Låt igen $K = 4$, $T_i = 10$ och $H = 0$. Vad är det stationära värdet på y när alla insignaler är enhetsramper, alltså $r(t) = d(t) = n(t) = t$ för alla $t \geq 0$. (1.5 p)



Figur 5 Reglerkretsen för Problem 4.

Solution

a. För överföringsfunktionen från d till u har vi (antag $n = r = 0$)

$$-C(P(Hd + u) + d) = u \qquad \Rightarrow \qquad -CPHd - Cd = CPu + u$$

$$\Rightarrow \qquad u = \frac{-C(PH + 1)}{1 + CP}d$$

och för överföringsfunktionen från n till u har vi (antag $r = d = 0$)

$$-C(Pu + n) = u \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{-C}{1 + CP} n$$

b.

$$P(C(r - n - y) + Hd) + d = y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{PC}{1 + PC} r + \frac{1 + PH}{1 + PC} d + \frac{-PC}{1 + PC} n$$

c. Det karakteristiska polynomet är

$$T_i s(s^2 + 2s - 2) + KT_i s + K = T_i s^3 + 2T_i s^2 + T_i(K - 2)s + K = 0.$$

Omformulering ger

$$s^3 + 2s^2 + (K - 2)s + K/T_i = 0.$$

Stabilitetskriterier är:

$$K - 2 > 0, \qquad K/T_i > 0, \qquad 2(K - 2) > K/T_i$$

vilket ger

$$K > 2, \quad T_i > \frac{K}{2(K - 2)}$$

d. Vi kan hitta det stationära värdet genom att använda slutvärdesteoremet (eftersom systemet är stabilt)

$$\begin{aligned}
y(\infty) &= \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{PC}{1 + PC} + \frac{1 + PH}{1 + PC} + \frac{-PC}{1 + PC}\right)\frac{1}{s} \\
&= \lim_{s \to 0}\left(\frac{PC + 1 - PC}{1 + PC}\right) = \lim_{s \to 0}\left(\frac{1}{1 + PC}\right) = \lim_{s \to 0} \frac{T_i s(s^2 + 2s - 2)}{T_i s(s^2 + 2s - 2) + K(1 + T_i s)} = 0
\end{aligned}$$

e. Vi kan hitta det stationära värdet genom att använda slutvärdetteoremet (eftersom systemet är stabilt)

$$\begin{aligned}
y(\infty) &= \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{PC}{1 + PC} + \frac{1 + PH}{1 + PC} + \frac{-PC}{1 + PC}\right)\frac{1}{s^2} \\
&= \lim_{s \to 0}\left(\frac{PC + 1 - PC}{1 + PC}\right)\frac{1}{s} = \lim_{s \to 0}\left(\frac{1}{1 + PC}\right)\frac{1}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{T_i s(s^2 + 2s - 2)}{T_i s(s^2 + 2s - 2) + K(1 + T_i s)} \frac{1}{s} = \frac{-2T_i}{K} = -5
\end{aligned}$$

5. Kim vill styra systemet

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x
\end{aligned}$$

med en tillståndsåterkoppling och har därför designat följande styrlag

$$u = -Lx + l_r r,$$

där $l_r = 13$ och

$$L = \begin{bmatrix} 17.25 & 7 \end{bmatrix}$$

Efteråt inser Kim att alla tillstånd inte är mätbara och tänker då att att styrlagen är ett misslyckade. Som tur är så är du där och påpekar att det kanske ändå går att använda styrlagen, detta genom att även designa en observerare.

a. Visa att systemet är observerbart. (1 p)

b. Hjälp Kim att designa en observerare som är lämplig att använda på systemet tillsammans med Kims styrlag (motivera dina designval). (3 p)

Solution

a. För att avgöra om systemet är observerbart eller ej så konstruerar vi observerbarhetsmatrisen och kollar sedan om alla kolonner är linjärt oberoende eller inte.

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eftersom W_o är en 2x2 matris och

$$\text{rank}(W_o) = 2$$

så har vi full rang och därmed även linjärt oberoende kolonner, och systemet är därför observerbart. Ett annat sätt att kolla detta är genom att verifiera att $\det(W_o) \neq 0$.

b. En tumregel är att placera observerarens poler i samma vinkel som det slutna systemets poler men minst dubbelt så lång bort från origo.

Vi börjar med att hitta polerna till det slutna systemet med den givna styrlagen. För ett system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

med styrlag

$$u = -Lx + l_r r$$

är det slutna systemets överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r r$$

Polerna beräknas genom att lösa

$$\det(sI - (A - BL)) = 0.$$

Vi får

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17.25 & 7 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 32.5 & s+13 \end{bmatrix} \right) \\ &= (s-1)(s+13) - (-65) \\ &= s^2 + 12s - 13 + 65. \end{aligned}$$

Om vi löser för s får vi

$$s = -6 \pm 4i.$$

Observeraren ska designas att vara minst 2 gånger så snabb som det slutna systemets poler. Vi väljer dubbelt så snabbt och placerar observerarens poler i $p_{1,2} = -12 \pm 8i$.

Observerarens dynamik ges av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(Cx - C\hat{x}).$$

Dynamiken för felet mellan den riktiga processens tillstånd och observerarens uppskattade tillstånd ges av

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A - KC)\tilde{x}.\end{aligned}$$

Vi hittar nu K så att $(A-KC)$ får önskade egenvärden, $p_{1,2} = -12 \pm 8i$, genom att lösa $\det(sI - (A - KC)) = (s - p_1)(s - p_2)$:

$$\begin{aligned}&\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s - 1 + k_1 & -2 \\ -2 + k_2 & s - 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (s - 1 + k_1)(s - 1) - (-2(-2 + k_2)) \\ &= s^2 + s(k_1 - 2) - 3 - k_1 + 2k_2\end{aligned}$$

Vi expanderar det karakteristiska polynomet

$$(s - p_1)(s - p_2) = (s + 12 + 8i)(s + 12 - 8i) = s^2 + 24s + 64 + 144.$$

och matchar koefficienter

$$\begin{cases} k_1 - 2 = 24 \\ -3 - k_1 + 2k_2 = 208 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 26 \\ k_2 = \dfrac{237}{2} = 118.5. \end{cases}$$

6. Det här problemet handlar om kompenseringslänkar.

a. Systemet

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 0.5)}$$

styrs med enkel proportionerlig återkoppling (förstärkning 1), men beter sig inte på önskat sätt. Designa en kompenseringslänk som gör systemet 2 gånger så snabbt (d.v.s. skärfrekvensen ω_c ska dubblas) samtidigt som en fasmarginal om $\phi_m = 12.5°$ uppnås. (2.5 p)

b. Låt $N \to \infty$ för en fasavancerande kompenseringslänk. Vilken typ av regulator motsvarar detta? Vilket problem kan uppstå med denna struktur på regulatorn? Hur kan vi lösa detta problem? (1 p)

Solution

a. Från specifikationen är det klart att vi vill designa en fasavancerande länk. Denna har formen:

$$G_r(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN} = K_k \frac{1+s/b}{1+s/(bN)} \qquad N > 1$$

Först vill vi hitta den ursprungliga skärfrekvensen.

$$1 = |G_1(i\omega_c^{\text{old}})| = \frac{1}{|\omega_c^{\text{old}}|(\sqrt{(\omega_c^{\text{old}})^2+1})(\sqrt{(\omega_c^{\text{old}})^2+0.5^2})}$$

Numerisk lösning ger $\omega_c^{\text{old}} \approx 0.815$. Därför ska den nya skärfrekvensen vara $\omega_c^{\text{new}} \approx 1.63$ enligt specifikationen.

Nu tar vi reda på hur mycket vi måste öka fasen för att nå den specificerade fasmarginalen, 12.5°. Detta givet vår nya skärfrekvens ω_c^{new}:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_m &= \arg(G_r(i\omega_c^{\text{new}})) = \phi_m^{\text{new}} - (180 + \arg(G_0(i\omega_c^{\text{new}})) \\ &= 12.5 - (180 + (-90 - \frac{180}{\pi}(\arctan(\omega_c^{new}) + \arctan(\frac{\omega_c^{\text{new}}}{0.5}))) \\ &= 53.81°,\end{aligned}$$

där ϕ_m^{new} är vår önskade fasmarginal och $\Delta\phi_m = \arg(G_r(i\omega_c^{\text{new}}))$ är den önskade fasförändringen vid frekvens ω_c^{new} för kompenseringslänken.

Från föreläsningsanteckningarna ser vi att $N = 9$ är lämpligt. Nästa steg är att hitta b så att toppen på faskurvan för kompenseringslänken hamnar vid ω_c^{new}. Denna hittas genom följande relation

$$\begin{aligned} & b\sqrt{N} = \omega_c^{new} \\ \Leftrightarrow \quad & b = \frac{\omega_c^{new}}{\sqrt{N}} = \frac{1.63}{3} = 0.542\end{aligned}$$

Det sista steget är att hitta förstärkningen K_k. Vi vet från definitionen av skärfrekvensen att

$$1 = |G_r(i\omega_c^{\text{new}})G_1(i\omega_c^{\text{new}})| = K_k\sqrt{N}|G_1(i\omega_c^{\text{new}})|.$$

Eftersom

$$|G_1(i\omega_c^{\text{new}})| = \frac{1}{|\omega_c^{\text{new}}|(\sqrt{(\omega_c^{\text{new}})^2+1})(\sqrt{(\omega_c^{\text{new}})^2+0.5^2})} \approx 0.1894$$

får vi slutligen

$$K_k = \frac{1}{0.1894\sqrt{N}} \approx 1.76$$

b. Om N $\to \infty$ så har vi designat en PD-regulator eftersom

$$G_r(s) = K_k \frac{1+s/b}{1+s/(bN)} \approx K_k(1+s/b).$$

En ren PD-regulator kan förstärka brus för mycket pga stor förstärkning för höga frekvenser. För att lindra detta kan vi lägga till ytterligare ett lågpassfilter med en relativt snabb pol (snabbare än alla andra poler/nollställen från PD-regulatorn eller kompenseringslänken) till regulatorn.