LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 13 januari 2021, 08:00-13:00

- Tjugondag Knut, här kommer tentan till slut

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Allt material och utrustning får användas (såsom formelsamling, föreläsningsanteckningar, övningshäfte, Matlab, miniräknare etc.). MEN, sammarbete eller hjälp från någon annan är INTE tillåtet.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tid och plats för tentavisning kommer att anges på kurshemsidan.

1. Ett linjärt, tidsinvariant system beskrivs av differentialekvationen

$$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t),$$

där $y(t)$ är mätsignal och $u(t)$ är styrsignal.

a. Vad är systemets överföringsfunktion? (1 p)

b. Hitta systemets poler. *Tips*: Systemet har en pol i $s = -1$, d.v.s. systemets karakteristika polynom har en faktor $(s + 1)$. (1 p)

c. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? Motivera ditt svar. (0.5 p)

d. Antag att styrsignal $u(t)$ är ett enhetssteg. Vad är stegsvaret $y(t)$ då $t \to \infty$? Motivera ditt svar. (1 p)

Solution

a. Laplacetransformation av differentialekvationen ger

$$s^3Y(s) + 2s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = 2sU(s) + U(s)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)Y(s) = (2s + 1)U(s)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}U(s).$$

Alltså är systemets överföringsfunktion

$$\frac{2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

b. Systemet har det karakteristika polynomet $s^3 + 2s^2 + 2s + 1$. Insättning ger att $s = -1$ är en pol till systemet. Polynomdivision ger att

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{s + 1} = s^2 + s + 1,$$

som medför att

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = (s + 1)(s^2 + s + 1).$$

Från faktorn $s^2 + s + 1$ ser vi att systemet också har poler i $-0.5 \pm i\sqrt{0.75}$.

c. Eftersom alla poler ligger i det vänstra halvplanet ser vi att systemet är asymptotiskt stabilt. Vi kan också se detta genom att betrakta systemet karakteristika polynom $s^3 + 2s^2 + 2s + 1$. Det gäller för koefficienterna att

$$2 > 0, \quad 2 > 0, \quad 1 > 0, \quad 2 \cdot 2 > 1,$$

vilket ger att systemet är asymptotiskt stabilt.

d. Styrsignalen $u(t)$ ges av

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

med Laplacetransform $U(s) = 1/s$. I detta fall ges $Y(s)$ av uttrycket

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^3+2s^2+2s+1}\frac{1}{s}.$$

Notera att $sY(s)$ har samtliga poler i vänsta halvplanet. Detta medför att vi kan använda slutvärdesteoremt, vilket ger att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 1.$$

2. Ett system beskrivs av följande differentialekvation

$$\ddot{y} + \dot{y}y + y^2 = u.$$

a. Inför tillståndsvariablerna $x_1 = y$ samt $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Bestäm alla stationära punkter (x^0, u^0) för systemet. (0.5 p)

c. Linjärisera systemet kring den stationära punkt för vilken $x_1^0 = 1$. (1 p)

Solution

a. Med tillståndsvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ får vi tillståndsformen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 =: f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= -x_2x_1 - x_1^2 + u =: f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= x_1 =: g(x_1, x_2, u). \end{aligned}$$

b. Stationära punkter är de punkter för vilka $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$, d.v.s. de punkter som uppfyller

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -x_2x_1 - x_1^2 + u. \end{cases}$$

Samtliga sådana punkter ges av $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (\pm\sqrt{t}, 0, t)$, för $t \geq 0$.

c. Den stationära punkt där $x_1^0 = 1$ är $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 0, 1)$. De partiella derivatorna för systemekvationerna blir

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -x_2 - 2x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1, \\ &\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

Med $x = [\,x_1 \quad x_2\,]^T$ inför vi variablerna $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$, vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta x + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \\
\Delta y &= [\,\tfrac{\partial g}{\partial x_1} \quad \tfrac{\partial g}{\partial x_2}\,]\big|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(x_1^0, x_2^0, u^0)} \Delta u = [\,1 \quad 0\,]\,\Delta x.
\end{aligned}$$

3. Anna och Bobby studerar ett system som är beskrivet med överföringsfunktionen $G(s)$. De skriver båda ner tillståndsbeskrivningen för systemet.

Anna får följande tillståndsbeskrivning:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 3u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Bobby får följande tillståndsbeskrivning:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\,1 \quad 0\,]\, x(t)$$

a. Annas system är både observerbart och styrbart. Är Bobbys system både observerbart och styrbart? (1 p)

b.
- Bobby säger att de har fått olika tillståndsbeskrivningar och att en av dem måste ha räknat fel.
- Anna säger att deras tillståndsbeskrivningar beskriver samma system och att båda har gjort rätt.

Vem har rätt? Motivera varför denne person har rätt. (2 p)

Solution

a. Styrbarhetsmatrisen räknas ut till $W_s = [\,B \quad AB\,] = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$. Determinanten för denna är 30 och således är Bobbys system styrbart.

Observerbarhetsmatrisen räknas ut till $W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Determinanten för denna är 0 och således är Bobbys system inte observerbart.

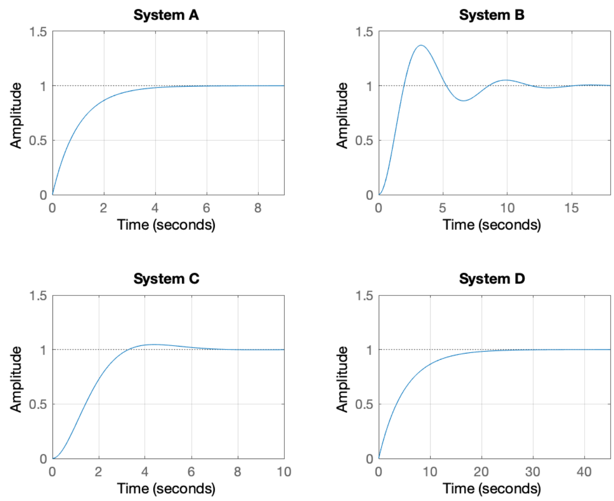
Detta indikerar att Bobby har valt att beskriva överföringsfunktionen $G(s)$ med fler tillstånd än nödvändigt.

b. Vi vet att ett och samma system kan beskrivas med flera olika tillståndsbeskrivningar och att vi själva kan välja tillstånden. Ett sätt att kolla ifall två olika tillståndsbeskrivningar beskriver samma system är att räkna ut överföringsfunktionen för systemet enligt $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

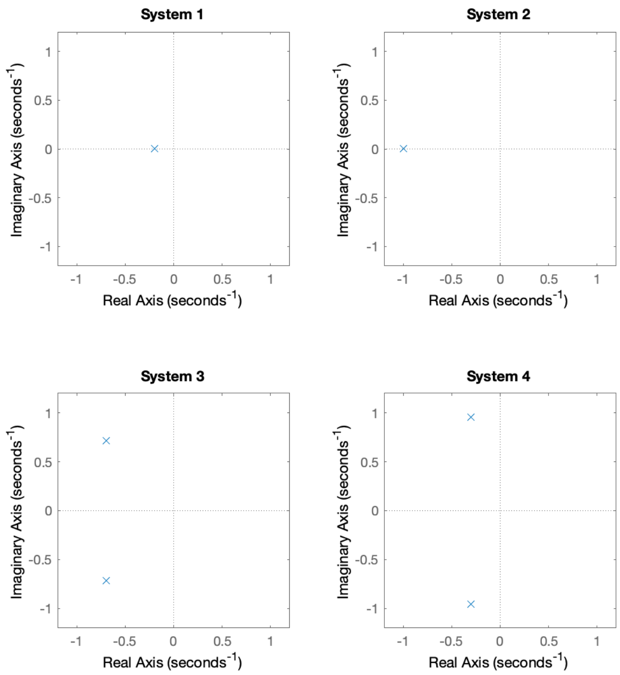
Om vi gör detta ser vi att både Anna och Bobby får överföringsfunktionen $G(s) = \frac{3}{s+2}$. Bobby har lagt till ett extra tillstånd i sin beskrivning som inte är observerbart.

Alltså är det Anna som har rätt, båda har gjort riktiga tillståndsbeskrivningar som beskriver samma system fast de har valt olika tillstånd.

4. Kombinera stegsvaren för systemen A-D i figur 1 med singularitetsdiagrammen 1-4 i figur 2. Motivera dina svar! (motivationen ”det var dessa som blev över” ger noll poäng) (2 p)



Figur 1: Stegsvar för uppgift 4



Figur 2: Singularitetsdiagram för uppgift 4

Solution

Stegsvar A och D är båda av första ordningen. System A har en tidskonstant på ca 1 sekund och system D har en tidskonstant på ca 5 sekunder. Stegsvar

B och C är båda av andra ordningen och ungefär lika snabba. System B har mer svängningar än system C. B har således lägre dämpning än C.

Av singularitetsdiagrammen har system 1 och 2 en pol och är första ordningens system. System 1 har en pol i -0.2, vilket motsvarar en tidskonstant på 5 sekunder och system 2 har en pol i -1 vilket motsvarar en tidskonstant på 1 sekund. System 3 och 4 har båda två stycken poler och är således andra ordningens system. För både system 3 och 4 ligger polerna ungefär lika långt ifrån origo och är därmed ungefär lika snabba, dock är polerna för system 4 betydligt närmre den imaginära axeln än polerna i system 3. Alltså är system 4 mindre dämpat än system 3.

Rätt kombination: A - 2, B - 4, C - 3 och D - 1

5. Skissa bodediagrammet för överföringsfunktionen $G(s) = \frac{2(s+10)}{(s+500)(s+1)}$

(2 p)

Solution

Vi börjar med att dela upp överföringsfunktionen i ”brytpunktsordning”. $G(s) = 2 \cdot (s+1)^{-1} \cdot (s+10) \cdot (s+500)^{-1}$.

Amplitudkurvans asymptoter:

- Vid låga frekvenser är den 0.04.
- Vid brytfrekvensen 1 rad/s minskar lutningen med 1.
- Vid brytfrekvensen 10 rad/s ökar lutningen med 1 och är således tillbaka på lutningen 0.
- Vid brytfrekvensen 500 rad/s minskar lutningen med 1 igen.

Faskurvans asymptoter:

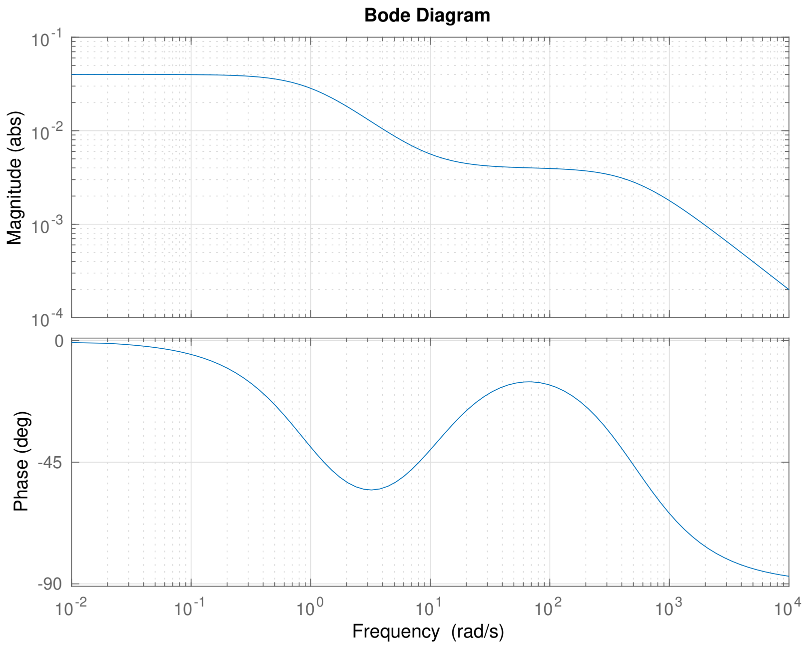
- Fasen börjar på 0° för de låga frekvenserna.
- Vid brytfrekvensen 1 rad/s minskar fasen ner mot -90°.
- Vid brytfrekvensen 10 rad/s ökar fasen med 90° och går upp mot 0° igen.
- Vid brytfrekvensen 500 rad/s minskar fasen med -90° grader igen och slutar på -90° för höga frekvenser.

Bodediagrammet i sin helhet finns i figur 3.

6. Du har precis börjat ditt första jobb som reglertekniker på företaget Petra Tak. Ditt första uppdrag är att undersöka en process där man försöker reglera nivån havremjölk i en tank med hjälp av en PI-regulator. Det är viktigt att kunna hålla rätt nivå för att få rätt tryck när mjölkpaketen ska fyllas. Eftersom det går väldigt snabbt att fylla paketen och byta till nya kan du approximera utflödet från tanken som kontinuerligt. Du drar dig till minnes laboration 2 i reglerteknik och modellerar tanken på samma vis. Du har fått fram överföringsfunktionen:

$$G_{tank}(s) = \frac{\rho\tau}{\tau s + 1}$$

som beskriver systemet från inflöde av havremjölk till nivå havremjölk i tanken. Genom att utföra liknande experiment som på laboration 2 har du kommit fram



Figur 3: Bodeplot till överföringsfunktionen $G(s) = \frac{2\cdot(s+10)}{(s+500)(s+1)}$

till att $\rho = 0.1$ och $\tau = 10$. För att fylla på med havremjölk i tanken pumpas mjölk från en större reservoar med en elektrisk pump. På pumpen kan du läsa att pumpen kan modelleras som 2 poler i -1 och med en statisk förstärkning på 1. Du noterar även att det är en ganska lång slang från pumpen till tanken du vill reglerara nivån i. Tiden som det tar för havremjölken att lämna pumpen tills dess att den når tanken uppskattar du till 2 sekunder.

Därmed har du kommit fram till att pumpen och slangen tillsammans kan beskrivas som:

$$G_{pump}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}e^{-2s}$$

För att klara störningar och kunna ändra referensvärdet för nivån havremjölk används redan enkel återkoppling med en PI-regulator som har $K = 2$ och $T_i = 8$. PI-regulatorn är implementerad på en dator och skickar ut en elektrisk ström till pumpen.

a. Rita blockschemat för det återkopplade systemet. Markera tydligt tank, pump och regulator, samt ange vad alla pilar representerar i fysiska storheter. Till exempel, referensvärdet är "Önskad höjd". (1 p)

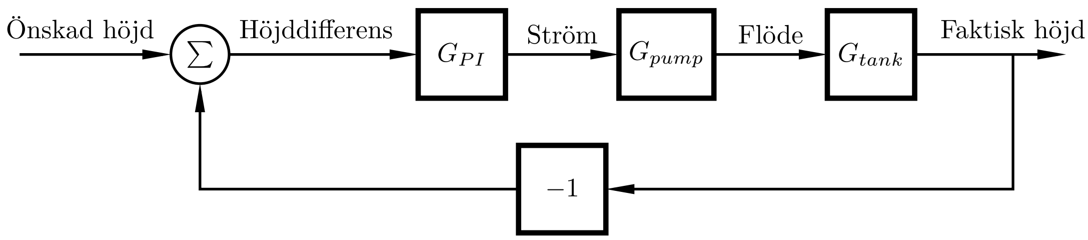
b. Bestäm det öppna systemets överföringsfunktion (kretsöverföringsfunktionen) som kvoten mellan två polynom och en tidfördröjning. Sätt in numeriska värden på alla parametrar. (*Tips:* Behåll parenteser i täljare och nämnade, för enklare räkningar i senare uppgifter. Dvs utryck täljare och nämnare som multiplikation av teremer på formen $(a\cdot s+b)$ för några kontanter a och b) (0.5 p)

c. Bestäm fasmarginalen. (2 p)

d. Bestäm amplitudmarginalen. Vad betyder denna amplitudmarginal för det maximal K som kan vara i PI-regulatorn, innan det blir instabilt? (2 p)

e. Bestäm dödtidsmarginalen. (0.5 p)

Solution



Figur 4: Blockschema för a) uppgiften

a.

b.

$$
\begin{aligned}
G_0(s) &= G_{PI}(s) \cdot G_{pump}(s) \cdot G_{tank}(s) \\
&= \frac{sKT_i + K}{sT_i} \cdot \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2} \cdot \frac{\rho\tau}{s\tau + 1} = \frac{\rho\tau(sKT_i + K)}{sT_i(s+1)^2(s\tau+1)} e^{-2s} \\
&= \frac{1 \cdot (16s + 2)}{8s(s+1)^2(10s+1)} e^{-2s} = \frac{2s + 0.25}{s(10s+1)(s+1)^2} e^{-2s}
\end{aligned}
$$

c.

$$\phi_m = arg(G_0(i\omega_c)) + \pi$$

Bestäm först ω_c. Definitionen av ω_c är:

$$|G_0(i\omega_c)| \equiv 1$$

$$
\begin{aligned}
|G_0(i\omega_c)| &= \left| \frac{2i\omega_c + 0.25}{i\omega_c(10i\omega_c + 1)(i\omega_c + 1)^2} e^{-2i\omega_c} \right| = \frac{|2i\omega_c + 0.25|}{|i\omega_c| \cdot |(10i\omega_c + 1)| \cdot |(i\omega_c + 1)|^2} |e^{-2i\omega_c}| \\
&= \frac{\sqrt{4\omega_c^2 + 0.0625}}{\omega_c \cdot \sqrt{100\omega_c^2 + 1} \cdot (\omega_c^2 + 1)} \equiv 1
\end{aligned}
$$

Numerisk lösning ger att ω_c=0.202 rad/s.
Beräkna sen fasen vid den frekvensen, dvs $arg(G_0(i\omega_c))$

$$
\begin{aligned}
arg(G_0(i\omega_c)) &= arg\left(\frac{2i\omega_c + 0.25}{i\omega_c(10i\omega_c + 1)(i\omega_c + 1)^2} e^{-2i\omega_c} \right) \\
&= arg(2i\omega_c + 0.25) - arg(i\omega_c) - arg(10i\omega_c + 1) - 2 \cdot arg(i\omega_c + 1) \\
&+ arg(e^{-2i\omega_c}) \\
&= arctan(\frac{2\omega_c}{0.25}) - \pi/2 - arctan(\frac{10\omega_c}{1}) - 2 \cdot arctan(\frac{\omega_c}{1}) - 2\omega_c \\
&= -2.47 rad
\end{aligned}
$$

$$\phi_m = arg(G_0(i\omega_c)) + \pi = -2.47rad + \pi rad = 0.672rad = 38.5°$$

d.

$$A_m = 1/|G_0(i\omega_0)|$$

Bestäm först ω_0. Definitionen av ω_0 är:

$$arg(G_0(i\omega_0)) \equiv -\pi$$

$$\begin{aligned} arg(G_0(i\omega_0)) = arg\left(\frac{2i\omega_0 + 0.25}{i\omega_0(10i\omega_0+1)(i\omega_0+1)^2}e^{-2i\omega_0}\right) \\ &= arg(2i\omega_0 + 0.25) - arg(i\omega_0) - arg(10i\omega_0+1) - 2\cdot arg(i\omega_0+1) \\ &+ arg(e^{-2i\omega_0}) \\ &= arctan(\frac{2\omega_0}{0.25}) - \pi/2 - arctan(\frac{10\omega_0}{1}) - 2\cdot arctan(\frac{\omega_0}{1}) - 2\omega_0 \\ &\equiv -\pi \end{aligned}$$

Numerisk lösning ger $\omega_0 = 0.387$ rad/s

Beräkna sen förstärkningen vid den frekvensen dvs. $|G_0(i\omega_0)|$

$$\begin{aligned} |G_0(i\omega_0)| &= \left|\frac{2i\omega_0 + 0.25}{i\omega_0(10i\omega_0+1)(i\omega_0+1)^2}e^{-2i\omega_0}\right| = \frac{|2i\omega_0 + 0.25|}{|i\omega_0|\cdot|(10i\omega_0+1)|\cdot|(i\omega_0+1)|^2}|e^{-2i\omega_0}| \\ &= \frac{\sqrt{4\omega_0^2 + 0.0625}}{\omega_0\cdot\sqrt{100\omega_0^2+1}\cdot(\omega_0^2+1)} = 0.457 \end{aligned}$$

$$A_m = 1/|G_0(i\omega_0)| = 1/0.427 = 2.18$$

A_m är den faktor man maximalt kan öka förstärkningen utan att systemet blir instabilt. Förstärkningen på K i PI-regulatorn var 2. Det betyder att $K_{max,PI} = K_{gammal} \cdot A_m = 2 \cdot 2.18 = 4.37$.

e. Dödtidsmarginalen ges av $L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} = \frac{0.672 \text{ rad}}{0.202 \text{ rad/s}} = 3.33$ s. Det betyder att det kan tillföras ytterliggare en tidsfördöjning på 3.33 sekunder utöver den befintliga på 2 sekunder, innan systemet blir instabilt.

7. Låt

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u$$
$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=C} x,$$

vara ett systemet på tillståndsform.

a. Antag att vi återkopplar vårt system med styrlagen

$$u = -Lx + l_r r,$$

där $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ är en vektor, l_r är en skalär och r är referensvärdet. Bestäm L så att det återkopplade systemets poler placeras i -5. (Du behöver inte bestämma l_r). (1.5 p)

b. Antag att vi istället återkopplar vårt system med styrlagen

$$u = -L\hat{x} + l_r r,$$

där L och l_r är som ovan men $\hat{x}$ är skattade tillstånd istället. Skattningen görs med ett Kalmanfilter

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky,$$

där $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T$ är en vektor. Bestäm K så att Kalmanfiltret är dubbelt så snabbt som tillståndsåterkopplingen. (1.5 p)

Solution

a. Det återkopplade systemet blir

$$\dot{x} = (A - BL)x + Bl_r r$$
$$y = Cx.$$

Vi har att

$$A - BL = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - l_1 & -l_2 \\ -l_1 & -2 - l_2 \end{pmatrix}$$

Det karakteristika polynomet blir

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BL)) &= \begin{pmatrix} s + 5 + l_1 & l_2 \\ l_1 & s + 2 + l_2 \end{pmatrix} \\ &= (s + 5 + l_1)(s + 2 + l_2) - l_1 l_2 \\ &= s^2 + (7 + l_1 + l_2)s + 10 + 2l_1 + 5l_2. \end{aligned}$$

Vi vill ha det karakteristika polynomet

$$(s + 5)^2 = s^2 + 10s + 25.$$

Identifiering av koefficienter ger att

$$\begin{cases} 7 + l_1 + l_2 = 10 \\ 10 + 2l_1 + 5l_2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 3. \end{cases}$$

b. Skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ uppfyller

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$

Vi har att

$$A - KC = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 2k_1 & -k_1 \\ -2k_2 & -2 - k_2 \end{pmatrix}$$

Det karakteristika polynomet för skattningsfelet blir

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - KC)) &= \begin{pmatrix} s + 5 + 2k_1 & k_1 \\ 2k_2 & s + 2 + k_2 \end{pmatrix} \\ &= (s + 5 + 2k_1)(s + 2 + k_2) - 2k_1k_2 \\ &= s^2 + (7 + 2k_1 + k_2)s + 10 + 4k_1 + 5k_2. \end{aligned}$$

Vi vill ha det karakteristika polynomet

$$(s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100.$$

Identifiering av koefficienter ger att

$$\begin{cases} 7 + 2k_1 + k_2 = 20 \\ 10 + 4k_1 + 5k_2 = 100 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k_1 = -\dfrac{25}{6} \\ k_2 = \dfrac{64}{3}. \end{cases}$$

8. Processen $G_p(s)$ återkopplas enkelt med en P-regulator $K = 1$.

$$G_p(s) = \frac{s + 4}{s^2 + s + 2}$$

a. Man skulle dock vilja halvera det statiska felet då referenssignalen är ett enhetssteg. Föreslå hur det detta skulle kunna genomföras med en kompenserande länk och räkna ut lämpliga parametrar för denna länk. Fasmarginalen får minska med högst 6 grader. (2 p)

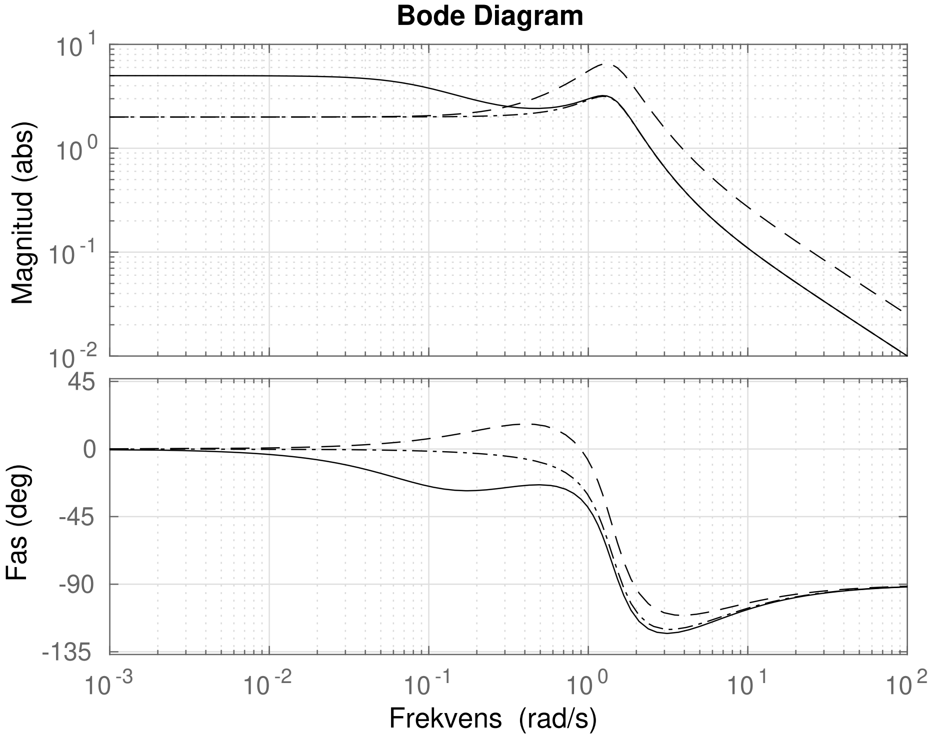
b. I bodediagrammet i Figur 5 nedan visas den okompenserade överföringsfunktionen $G_p(s)$, $G_p(s)$ som kompenserats med en fasavancerande länk, och $G_p(s)$ som kompenserats med en fasretarderande länk. Motivera vilken av kurvorna (heldragen, streckad, prick-streckad) som motsvarar vilket fall. (1 p)

Solution

a. För att undersöka det stationära fallet undersöker vi gränsvärdesteoremet:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{G_p(s)G_r(s)}{1 + G_p(s)G_r(s)} R(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_r(s)} R(s) = S(s)R(s)$$



Figur 5: Bode-diagram för uppgift 8b.

Här kan vi identifiera känslighetsfunktionen $S(s)$:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)} = \frac{s^2 + s + 2}{s^2 + 2s + 6} \implies S(0) = 1/3$$

Gränsvärdesteoremet ger:

$$\lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} sS(s)R(s) = \lim_{s \to 0} sS(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} S(s) = S(0) = \frac{1}{3}$$

För att förbättra rejektionen av stationära fel använder vi en fasretarderande länk $G_k(s)$:

$$G_k(s) = M\frac{1 + s/a}{1 + sM/a}$$

Detta ger:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_k(s)G_p(s)} = \frac{(1 + sM/a)(s^2 + s + 2)}{(1 + sM/a)(s^2 + s + 2) + M(1 + s/a)(s + 4)}$$

$$\implies S(0) = \frac{2}{2 + 4M}$$

För att ge en stationär förstärkning $S(0) \leq 1/6$ vill vi välja M lämpligt. Vi ser att $M = 2.5$ ger $S(0) = 1/6$ och är alltså rätt val.

För att se till att inte minska fasmarginalen mer än 6 grader använder vi $a = 0.1\omega_c$

För att hitta ω_c ansätter vi $|G_p(i\omega)| = 1$.

$$|G_p(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4^2}}{\sqrt{\omega^2 + (2^2 - \omega^2)}} = 1$$

Vi flyttar över nämnaren och kvadrerar, vilket ger:

$$\omega^2 + 16 = \omega^2 + 4 - 4\omega^2 + \omega^4$$

Genom att byta ut $\omega^2 = t$ får vi:

$$t^2 - 4t - 12 = 0$$

pq-formel ger:

$$t = 2 \pm \sqrt{2^2 + 12} = 2 \pm \sqrt{16} = 2 \pm 4$$

Då t måste vara positivt ser vi att $t = 6$ och därmed $\omega_c = \sqrt{6}$. Vår totala fasretarderande länk blir därmed:

$$M = 2.5, \quad a = 0.1\sqrt{6}$$

b. Vi ser att den heldragna kurvan har högre förstärkning vid låga frekvenser, och måste därför vara den fasretarderande länken. Den streckade kurvan har högre förstärkning vid höga frekvenser och måste därför vara den fasavancerande länken. Detta lämnar att prick-streckad linje är den okompenserade överföringsfunktionen.