LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 2019-04-23 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 2019-04-23

1. Ett system beskrivs av följande överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+5)}$$

a. Beskriv systemet som en differentialekvation. (1 p)

b. Beskriv systemet på tillståndsformen. Ange matriserna A, B, och C. (1 p)

c. Är systemet styrbart? (1 p)

Solution

a.

$$\begin{aligned} Y(s)(s+1)(s+5) &= 2U(s) \\ s^2Y(s) + 6sY(s) + 5Y(s) &= 2U(s)\{\text{invers Laplacetransform}\} \Rightarrow \\ \ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) &= 2u(t) \end{aligned}$$

b. Vi väljer att $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$ Således,

$$\dot{x}_2 + 6x_2 + 5x_1 = 2u$$

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_2 - 5x_1 + 2u \end{cases} \qquad \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = x_1 \qquad \Rightarrow y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

c. Systemet är styrbart om styrbarhetsmatrisen W_s har linjärt oberoende kolonner (är full rang). W_s ges av

$$W_s = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}.$$

Systemet har linjärt oberoende kolonner om W_s determinanten är skild från noll:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -12 \end{bmatrix} = 0 - 4 \neq 0.$$

Således är systemet styrbart.

2. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 + 1 \\ y &= x_1^2 + x_2 \end{aligned}$$

a. Finn alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) för systemet. (1 p)

b. Linjärisera systemet för $u^0 = 1$. (2 p)

c. Är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

Solution

För att förenkla uttrycken inför vi $f_1(x_1, x_2, u)$, $f_2(x_1, x_2, u)$ och $g(x_1, x_2, u)$ så att systemet kan skrivas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u)\\ y &= g(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

a. Vi finner de stationära punkterna genom att sätta $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Ekvationen $f_1(x_1, x_2, u)) = 0$ ger då $x_1^0 = (u^0)^2$. Sätter vi in detta i ekvationen $f_2(x_1, x_2, u)) = 0$ får vi $0 = (x_1^0)^2 - x_2^0 + 1$ vilket ger $x_2^0 = (x_1^0)^2 + 1 = (u^0)^4 + 1$. Sammantaget ges de stationära punkterna av

$$(x_1^0, x_2^0, u^0) = \Big((u^0)^2, (u^0)^4 + 1, u^0\Big)$$

b. För $u^0 = 1$ är den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 2, 1)$.

Vi inför nya variabler $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, $\Delta u = u - u^0$, och $\Delta y = y - y^0$. Det linjäriserade systemet ges då av

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{pmatrix} + B\Delta u\\ \Delta y &= C\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{pmatrix} + D\Delta u\end{aligned}$$

där

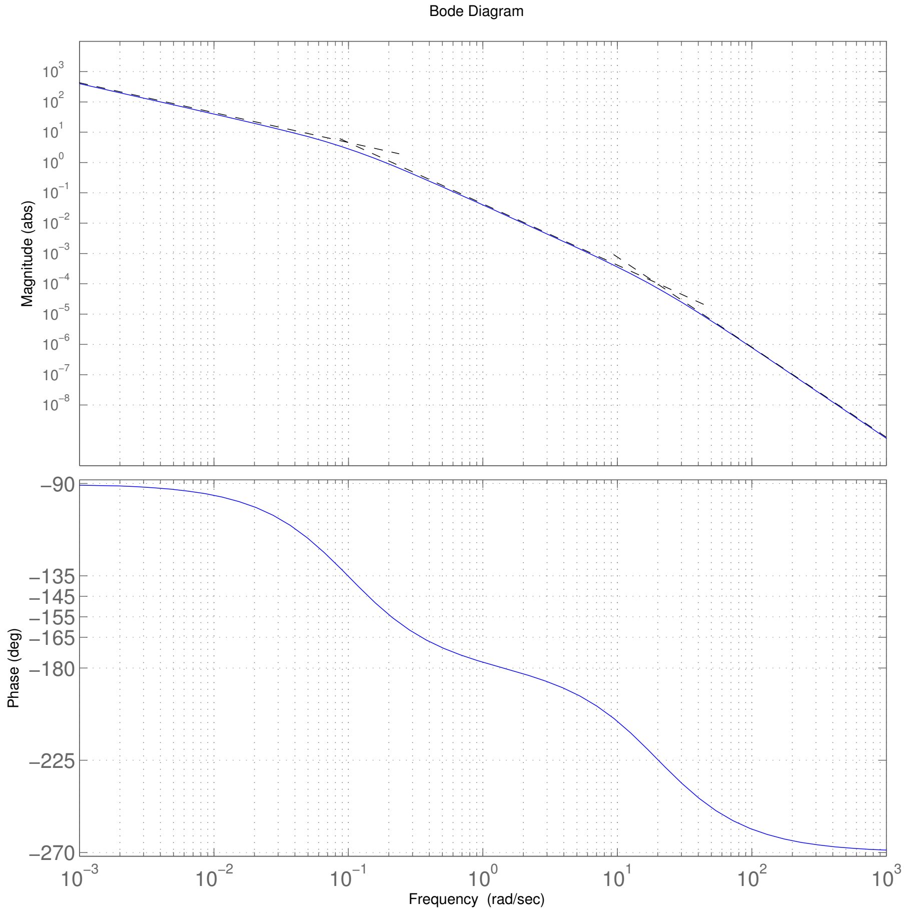
$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}\Bigg|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2x_1^0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\ B &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\end{pmatrix}\Bigg|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix}2u^0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\\ C &= \begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}\Big|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix}2x_1^0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\\ D &= \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = 0\end{aligned}$$

c. Ja, ty A-matrisens egenvärden är $\{-1, -1\}$ det vill säga både ligger strikt i vänster halvplan.

3. I figur 1 visas Bodediagrammet för en kretsöverföringsfunktion.

a. Bestäm alla poler och nollställen. (1 p)

b. Hur stora är fas- och amplitudmarginalerna? (1 p)



Figur 1: Bodediagram för kretsöverföringsfunktion i uppgift 3

c. Antag att vi gör enkel återkoppling med en P-regulator med förstärkning $K = 1$. Är det slutna systemet stabilt? Motivera ditt svar. (1 p)

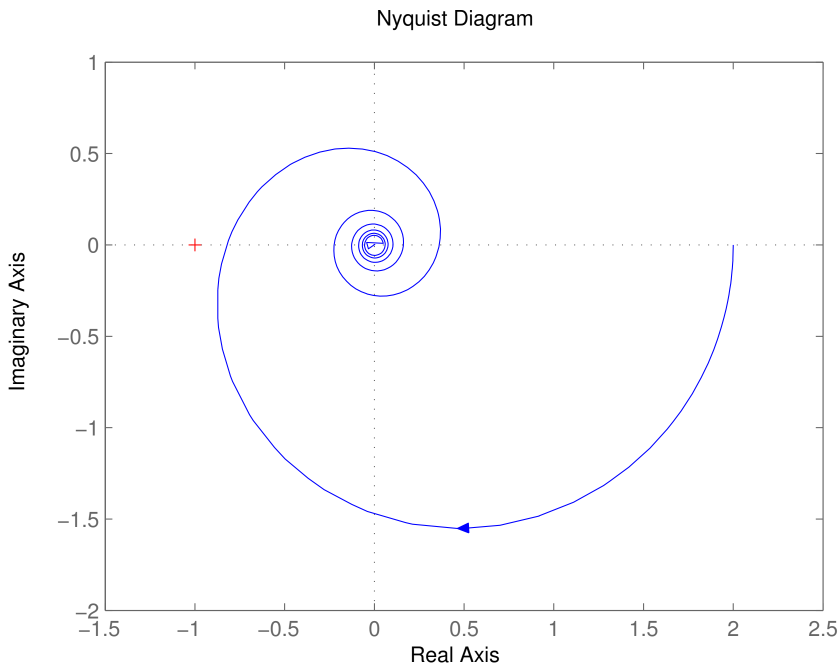
Solution

a. I Bodediagrammet kan man avläsa att systemet har brytfreqvenser vid $\omega = 20rad/s$ och $\omega = 0.1rad/s$. Dessutom ser vi att Bodediagrammet har -1 lutning och fas $= 90°$ då $\omega \to 0$. Det motsvarar poler i $s = 0$, $s = -0.1$, och $s = -20$, och inga nollställen.

b. Fasmarginal: $\phi_m = 27.5$ grader, amplitudmarginal: $g_m = 50.3$.

c. Ja, vi har positiv fas- och amplitudmarginal.

4. Nyquistkurvan för en stabil process kan ses i figur 2. Avgör med hjälp av figuren om vart och ett av följande påståenden är sant, falskt eller om du inte har tillräckligt med information om systemet. Systemet antas vara minimalt, dvs. inga pol-nollställesförkortningar har gjorts. Samtliga svar måste vara motiverade. Varje rätt svar ger 0.5 p. (3 p)



Figur 2: Nyquistdiagram för systemet i uppgift 4.

a. Om systemet återkopplas med en P-regulator med förstärkning $K = 2$ så blir det slutna systemet instabilt.

b. Systemets fasmarginal är mindre än $60°$.

c. Systemets dödtidsmarginal är större än 0.1 s.

d. Processens statiska förstärkning är 2.

e. Processen innehåller en integrator.

f. Processen är ett andra ordningens system med tidsfördröjning.

Solution

a. Sant. Amplitudmarginalen kan utläsas i Nyquistdiagrammet till $A_m \approx 1.2$. En P-regulator med $K = 2 > A_m$ skulle således göra det slutna systemet instabilt.

b. Sant. Fasmarginalen kan avläsas i figuren till $\phi_m \approx 30° < 60°$.

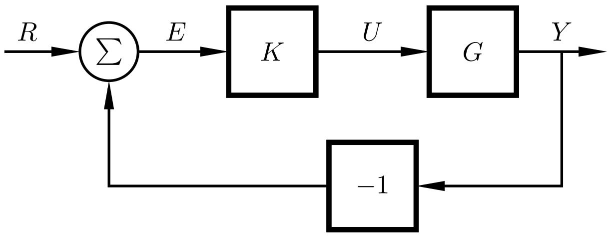
c. Ej tillräcklig information. För att beräkna systemets dödtidsmarginal måste vi ha tillgång till systemets skärfrekvens vilken är okänd.

d. Sant. Systemets statiska förstärkning kan avläsas vid Nyquistkurvans början, dvs. vid $\omega = 0$ till 2.

e. Falskt. Hade systemet haft en integrator skulle fasen för låga frekvenser vara $-90°$.

f. Ej tillräcklig information. Tidsfördröjningen gör det omöjligt att utifrån endast Nyquistkurvan avgöra systemets ordning.

5. Ett tredje ordningens system, $G(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+3s+1}$, återkopplas med en P-regulator med förstärkningen K (se figur 3).



Figur 3: Slutet system för uppgift 5 och 6

a. För vilka värden på K är det återkopplade systemet asymptotiskt stabilt? Betrakta både positiva och negativa värden för K. (2 p)

b. För vilka värden på K blir det stationära reglerfelet mindre än 0.1 om referensen är ett enhetssteg? Vilket är det minsta möjliga stationära reglerfelet? (2 p)

Solution

a. Det slutna systemets överföringsfunktion från referens till mätsignal är $\frac{KG}{1+KG} = \frac{K}{s^3+2s^2+3s+1+K}$. Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt om alla polerna ligger i det vänstra halvplanet (dvs de har negativ realdel). Detta är uppfyllt endast om både $a_1, a_2, a_3 > 0$ och $a_1 \cdot a_2 > a_3$ för det karakteristiska polynomet $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$. Av detta följer vilkoren

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 > 0 \text{ (OK)}, \\
a_2 &= 3 > 0 \text{ (OK)}, \\
a_3 &= 1 + K > 0 \Rightarrow K > -1 \\
a_1 \cdot a_2 &= 6 > a_3 = 1 + K \Rightarrow K < 5. \\
-1 &< K < 5
\end{aligned}$$

b. Överföringsfunktionen från referens till reglerfel är $\frac{1}{1+KG} = \frac{s^3+2s^2+3s+1}{s^3+2s^2+3s+1+K}$ och har samma poler som överföringsfunktionen från referensen till mätsignalen. Vi får alltså använda slutvärdesteoremet om system är stabilt $(-1 < K < 5)$.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+2s^2+3s+1}{s^3+2s^2+3s+1+K} = \frac{1}{1+K} < 0.1 \Rightarrow K > 9$$

Det finns alltså inga K som uppfyller detta.

Det minsta möjliga stationära felet är $\lim_{K\to 5} \frac{1}{1+K} = \frac{1}{6}$.

6. Ett system har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)},$$

och regleras med en P-regulator, K (se figur 3).

a. Sätt $K = 1$ (ger asymptotiskt stabilt system) och antag att

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Dimensionera en kompenseringslänk

$$G_k(s) = M\frac{s+a}{Ms+a} \tag{1}$$

så att det stationära felet minskar med en faktor 3, samtidigt som fasmarginalen inte får minska med mer än 6°. Ställ upp uttrycket för skärfrekvensen av $G(s)$ och visa att $\omega_c \approx 0.45$. (2 p)

b. Antag att du skulle vilja att kompenseringslänken hade en mindre inverkan på fasmarginalen jämfört med din design i a). Hur hade du behövt *ändra* M och/eller a i (1)?
Obs: du behöver inte räkna ut nya parametrar, utan bara förklara om du hade ökat/minskat M och/eller a samt varför. (1 p)

Solution

a. För att minska det stationära felet med en faktor 3 måste vi välja $M = 3$. Den okompenserade kretsöverföringsfunktionen är

$$G_o(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Skärfrekvensen ω_c ges av

$$\begin{aligned} |G_o(i\omega_c)| &= 1 \\ |G_o(i\omega_c)| &= \frac{1}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2}\sqrt{4+\omega_c^2}} \\ \omega_c^2(1+\omega_c^2)(4+\omega_c^2) &= 1 \\ \omega_c &\approx 0.45. \end{aligned}$$

Enligt tumreglen så att fasmarginalen inte minskar mer än 6° väljer vi $a = 0.1\omega_c = 0.045$. Alltså blir länkens överföringsfunktion

$$G_k(s) = M\frac{s+a}{Ms+a} = 3\frac{s+0.045}{3s+0.045}$$

b. M kunde minskas för att minska inverkan på fasmarginalen, men M får inte ändras på grund av kravet på att undertrycka det stationära felet. Återstår a som ska sänkas. Anledningen är att för varje $\omega > 0$ gäller det att:

$$\lim_{a\to 0} |G_k(i\omega)| = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{a\to 0} \arg\{G_k(i\omega)\} = 0.$$

med andra ord så kan vi minska inverkan av G_k på fasmarginalen godtyckligt bara vi sänker a tillräckligt mycket. (se figur 11.6 i Reglerteknik AK Föreläsningar, Tore Hägglund, 2017)

7. Betrakta

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u.$$

a. Var ligger det öppna systemets poler? (1 p)

b. Bestäm en styrlag

$$u = -Lx,$$

så att det återkopplade systemet blir dubbelt så snabbt som det öppna systemets snabbaste pol. (2 p)

c. Antag att vi inte kan mäta alla tillstånd, men att vi har tillgång till en mätsignal

$$y = Cx = [c_1\ c_2]x.$$

Vi vill använda utsignalen y för att skatta processens tillstånd x. Vilka krav ställer det på c_1 och c_2? (2 p)

Solution

a. Det karakteristiska polynomet

$$\det(sI - A) = (s+1)(s+3),$$

ger oss att polerna ligger i -1 och -3.

b. Den snabbaste polen är den på störst avstånd från origo, d.v.s. den i -3. Vi ska bestämma L så att polerna hamnar på avståndet 6 från origo. Detta kan vi göra genom att t.ex. lägga båda polerna i -6. Tillståndsåterkopplade systemets karakteristiska polynomet blir

$$(s+6)^2 = s^2 + 12s + 36.$$

Vi har att

$$\det(sI - A + BL) = s^2 + (4 + 4l_2)s + 8l_1 + 4l_2 + 3,$$

och således att

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 25/8 \\ 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

c. Observerbarhetsmatrisen ges av

$$W_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 & 2c_1 - 3c_2 \end{bmatrix}.$$

Systemet är observarbart om W_0 har full rang, det vill säga

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 & 2c_1 - 3c_2 \end{bmatrix} = c_1(2c_1 - 3c_2) + c_1 c_2 = 2c_1(c_1 - c_2).$$

Alltså måste vi ha att

$$\begin{cases} c_1 \neq 0 \\ c_1 \neq c_2 \end{cases}.$$