



LUND
UNIVERSITY

Department of
AUTOMATIC CONTROL

Automatic Control, Basic Course

Exam 28 October 2019, 8:00-13:00

Points and grades

All solutions must be well motivated. The whole exam gives 25 points. The number of points are presented after each problem. Preliminary grades:

Grade 3: at least 12 points,
4: at least 17 points,
5: at least 22 points.

Aids

Mathematical collections of formulae (e.g. TEFYMA), collections of formulae in automatic control, and calculators that are not programmed in advance.

Results

The results are presented through LADOK. Time and place for exam presentation will be announced on the course web page.

Good luck!

Solutions to exam in Basic Control 2019-10-28

1. A process can be described by the following differential equation:

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 8y = \dot{u} - 4u$$

- a. What is the transfer function of the process from U to Y ? (1 p)
- b. What are the poles and zeros of the process? Is it asymptotically stable? Motivate your answer. (1 p)
- c. The system is controlled with a P-controller with gain K , see Figure 1. For what values of K is the closed loop system asymptotically stable? (answer for both positive and negative values of K). (2 p)
- d. Suppose that we make a unit step change in setpoint R . Determine the stationary control error E . How small can we make the error using the P controller? (2 p)

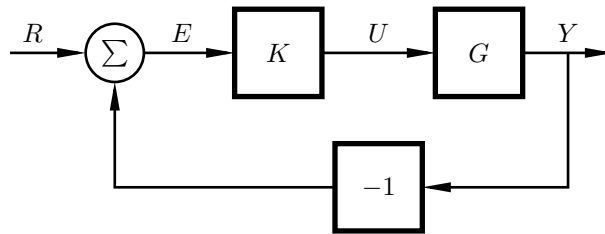


Figure 1: The closed loop system for problem 1.c.

Solution

- a. Performing a Laplace Transform on the differential equation, the transfer function of the system is given by $Y(s)(s^2 + 9s + 8) = U(s)(s - 3)$:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{s - 4}{s^2 + 9s + 8} \\ &= \frac{s - 4}{(s + 1)(s + 8)} \end{aligned}$$

- b. Zeros: $s = 4$
Poles: $s = -1, -8$

Both poles have negative real parts, therefore the system is asymptotically stable.

- c. The transfer function of the closed loop system is given by $G_{yr}(s) = Y(s)/R(s)$:

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= \frac{KG(s)}{(1 + KG(s))} \\ &= \frac{K(s - 4)}{(s^2 + 9s + 8) + K(s - 4)} \\ &= \frac{K(s - 4)}{s^2 + s(9 + K) + (8 - 4K)} \end{aligned}$$

The system is asymptotically stable when both poles are strictly in the left-half plane (have negative real parts). This is true if and only if $a_1, a_2 > 0$ for the characteristic polynomial $s^2 + a_1s + a_2$. Therefore,

$$\begin{aligned} 9 + K &> 0 \\ K &> -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 - 4K &> 0 \\ 8 &> 4K \\ -9 &< K < 2 \end{aligned}$$

- d. The static error of the response to a unit step can be computed applying the final value theorem to the Laplace transform of the error in response to a step input. The transfer function from the reference to the error is:

$$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 9s + 8}{s^2 + 9s + 8 + K(s - 4)}$$

We then apply the final value theorem. With a unit step input $R(s) = \frac{1}{s}$ the static error ($t \rightarrow \infty$) is given by evaluating $E(s) = sG_{er}(s)\frac{1}{s}$ where $s \rightarrow 0$.

$$G_{er}(0) = \frac{8}{8 - 4K}$$

Therefore we want to choose K within the stability range $-9 < K < 2$ to maximize the denominator in order to minimize the static error. This is obtained with $K = -9$, which gives a static error of $e(\infty) = 8/44 \approx 0.18$.

2. En pendel som svänger friktionslöst kan förenklat beskrivas med följande differentialekvation

$$\ddot{\theta} + \sin(\theta) = u$$

Här betecknar $\theta(t)$ dess vinkel från det viloläge då den hänger rakt ner, och $u(t)$ är den styrsignal vi påverkar pendeln med.

- a. Inför tillstånden $x_1 = \theta$ och $x_2 = \dot{\theta}$ och uttryck systemet på tillståndsform. Antag att vi bara kan mäta vinkeln, dvs. $y = x_1$. (1 p)
- b. Bestäm alla stationära punkter då vi inte påverkar systemet, dvs. då $u(t) = 0$. (1 p)
- c. Vi är speciellt intresserade av pendelns beteende när den hänger ner. Linjärisera systemet kring en stationär punkt motsvarande detta läge. (1 p)
- d. Visa att det linjäriserade systemet är stabilt men inte asymptotiskt stabilt.

Antag att vi låter pendeln börja upprätt med en vinkelhastighet 1 rad/s. Då kommer pendeln pga. friktionslöshet att snurra runt och runt i all evighet. Varför kan detta inte hända för ett stabilt system? Hur kommer det sig att vi trots det lyckades visa stabilitet? (1 p)

Solution

- a. Vi får direkt när vi deriverar första tillståndet att $\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$. Användning av differentialekvationen ger sedan $\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\sin(x_1) + u$, dvs.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_2(x_1, x_2, u) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) = -\sin(x_1) + u\end{aligned}$$

- b. Vi vill hitta de tillstånd $x_1(t) = x_1^0$ och $x_2(t) = x_2^0$ som inte ändrar sig över tid. Då måste \dot{x}_1 och \dot{x}_2 vara 0, och den övre ekvationen ger direkt att $x_2^0 = 0$. Det är rimligt att vinkelhastigheten är 0 stationärt.

Vad gäller den undre ekvationen försvann enligt antagandet u och vi får $0 = \sin(x_1)$ som har den allmänna lösningen $x_1 = k\pi$ för varje heltal k . Med andra ord ges samtliga stationära punkter av

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ u^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c. Nedvänt läge motsvaras av en vinkel på 0 grader, dvs. $x_1 = k\pi$ för jämna heltal k . Vilket jämmt k som helst funkar, så vi väljer enklast $k = 0$ och linjäriserar kring

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ u^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Standardförfarandet innebär att vi tar följande partiella derivator

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1^0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = (1 \quad 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

utvärderade i den stationära punkten vi valt.

Nu inför vi de nya variablerna

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \\ \Delta y &= y - y^0\end{aligned}$$

som motsvarar avvikelserna från vår stationära punkt. Vårt linjäriserade system blir nu uttryckt i dessa variabler

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u \\ \dot{\Delta y} &= (1 \quad 0) \Delta x\end{aligned}$$

- d. För att utvärdera stabilitet tittar vi som vanligt på det karakteristiska polynomet till A-matrisen, dvs.

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 - (-1)(1) = s^2 + 1 = (s + i)(s - i)$$

Nollställena till det karakteristiska polynomet blir alltså $s = i$ och $s = -i$, vilka motsvarar A-matrisens egenvärden. Eftersom att egenvärdena är unika och ligger på den imaginära axeln så är systemet stabilt, men inte asymptotiskt stabilt.

Utgångsläget motsvarar mot tillståndsvektorn $x(0) = (\pi, 1)^T$. För ett stabilt system gäller att varje initialtillstånd (inklusive detta) måste leda till begränsade tillstånd $x(t)$ för alla t . Men då kan speciellt inte $x_1(t) = \theta(t)$ öka obegränsat, vilket händer om pendeln snurrar runt och runt (vinkeln ökar konstant).

Det var det *linjäriserade* systemet som vi visade var stabilt. Men det linjäriserade systemet är bara giltigt kring vår stationära punkt $x^0 = (0, 0, 0)$. Modellen upphör alltså att representera differentialekvationen om något tillstånd är för stort, vilket var fallet här.

3. State which step response (I-VI, see Figure 2) and Bode plot (A-F, see Figure 3) match each of the four transfer functions below. Each correctly justified match is given 0.5 points. (4 p)

$$G_1(s) = \frac{s + 0.1}{s^2}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

$$G_3(s) = \frac{1.3}{s^2 + s + 1}$$

$$G_4(s) = \frac{2}{s + 2}$$

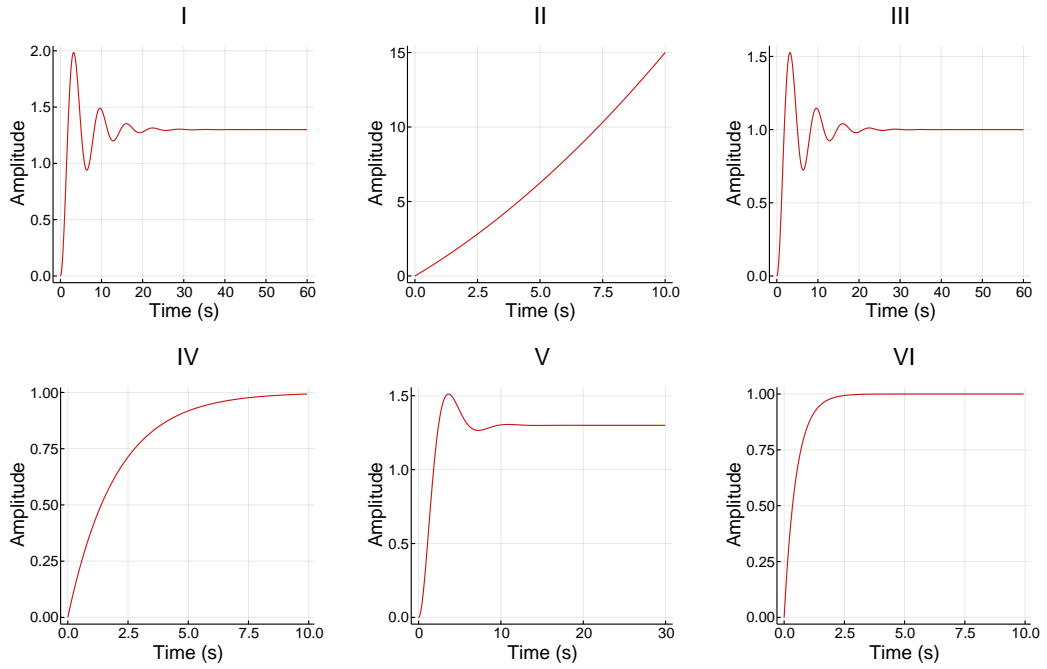


Figure 2: Step responses for problem 3.

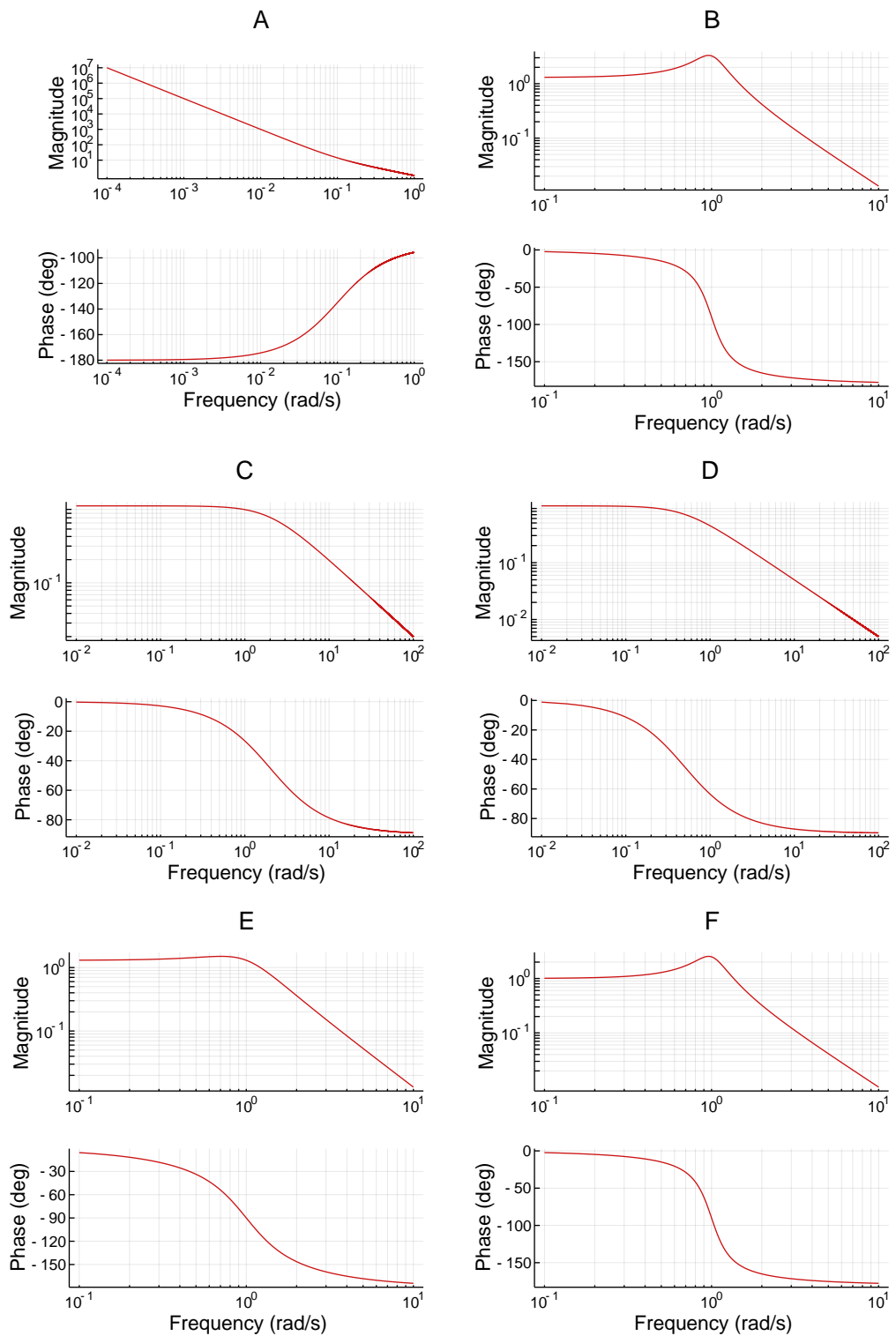


Figure 3: Bode plots for problem 3.

Solution

$G1$ has two poles at the origin (double integrator) and a zero at -0.1 (corner frequency at $\omega 0.1$). It is the only transfer function with integral action. Therefore, its static gain is infinite, as illustrated by step response II and Bode plot A . We also expect a phase of -180° at low frequencies due to the double integrator which only matches A .

$G2$ and $G3$ are second order systems. Considering the form $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ both have the same natural frequency $\omega 1$ but different damping factors ζ . Step responses I III and V show second order systems that are not fully damped, indicated by their oscillatory behavior. Bode plots B , E , and F also show second order systems, as their phase decreases by -180° . $G3$ is more damped than $G2$, and has a static gain of 1.3, matching step response V and Bode plot E . $G2$ has a static gain of 1, matching step response III and Bode plot F .

$G4$ is a first order system with a pole at -2 (corner frequency at $\omega 2$). Step responses IV and VI show first order systems of different speeds and a static gain of 1. Bode plots C and D show first order systems, as indicated by their -90° change in phase, with different corner frequencies. $G4$ has a time constant of $1/\omega 1/2s$ matching step response VI which reaches 0.63 after 0.5s. Its corner frequency matches Bode plot C .

4. I laboration 2 studerade vi en tankprocess som bestod av två tankar, den ena ovanpå den andra. Styrsignalen var inflödet till den övre tanken, vars utflöde utgjorde inflödet till den undre tanken. Systemet för den undre tanken härledde vi i förberedelseuppgifterna, och linjariserat kring en viss stationär punkt gavs det av

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \quad 1) x\end{aligned}$$

Här betecknar x_1 och x_2 avvikelserna från den övre resp. undre tankens stationära vattenhöjd givet ett konstant inflöde. Styrsignalens avvikelse från det senare betecknas här u . Konstanterna $\gamma_1, \gamma_2, \delta > 0$ är materialparametrar.

Då återkopplade vi endast från reglerfelet; nu vill vi återkoppla från tillstånden. Problemet är att vi bara mäter undre tankens vattenhöjd och känner därmed inte till x_1 , som vi måste skatta.

- a. Designa ett Kalmanfilter sådant att polerna hamnar i $s = -2 \pm 2i$. (2 p)
- b. Antag nu att vi istället bara kan mäta övre tankens nivå. Visa att systemet inte är observerbart. Kan man rent fysikaliskt se vilket tillstånd som är icke-observerbart? Resonera utifrån definitionen av observerbarhet. (1 p)

Solution

- a. Hur fort de skattade tillstånden konvergerar mot de riktiga tillstånden bestäms av polerna till matrisen $A - KC$. Den blir i vårt fall

$$A - KC = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & -k_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 - k_2 \end{pmatrix}$$

Polerna till denna matris ges som bekant av nollställena till det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - KC)) &= \begin{vmatrix} s + \gamma_1 & k_1 \\ -\gamma_1 & s - \gamma_2 + k_2 \end{vmatrix} = (s + \gamma_1)(s - \gamma_2 + k_2) - (-\gamma_1 k_1) \\ &= s^2 + (\gamma_1 - \gamma_2 + k_2)s + \gamma_1(k_1 + k_2 - \gamma_2) \end{aligned}$$

Vi skulle vilja placera polerna i $s = -2 \pm 2i$, dvs. vi vill mha. vårt K få det karakteristiska polynomet att bli

$$(s + 2 - 2i)(s + 2 + 2i) = s^2 + 4s + 8$$

Identifiering av koefficienter ger förhållandena

$$\begin{cases} 4 = \gamma_1 - \gamma_2 + k_2 \\ 8 = \gamma_1(k_1 + k_2 - \gamma_2) \end{cases}$$

där den övre ekvationen ger $k_2 = 4 - \gamma_1 + \gamma_2$ och den undre ger $k_1 = \frac{8}{\gamma_1} + \gamma_2 - k_2 = \frac{8}{\gamma_1} + \gamma_2 - 4 + \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{8}{\gamma_1} - 4 + \gamma_1$. Sammantaget hamnar polerna där vi vill med valet

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{\gamma_1} - 4 + \gamma_1 \\ 4 - \gamma_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}$$

- b. Om vi mäter x_1 istället för x_2 så är alltså $y = x_1$. Detta innebär en ändring av C-matrisen till

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observerbarhetsmatrisen ges denna gången av

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

och determinanten blir 0, varför systemet ej är observerbart.

Detta går att se rent fysikaliskt också. Hur man än sätter den undre tankens nivå $x_2(0)$ initialt (med $x_1(0) = u = 0$), så ger sig detta val inte till känna i den övre tanken och därmed i mätsignalen, eftersom vattnet rinner neråt och inte uppåt. Tillståndet är alltså icke-observerbart, vilket man också kan se av att alla tillstånd på formen $x = (0, \alpha)^T$ tillhör observerbarhetsmatrisens nollrum.

5. Betrakta bodediagrammet av kretsöverföringsfunktionen G_0 i figur 4.

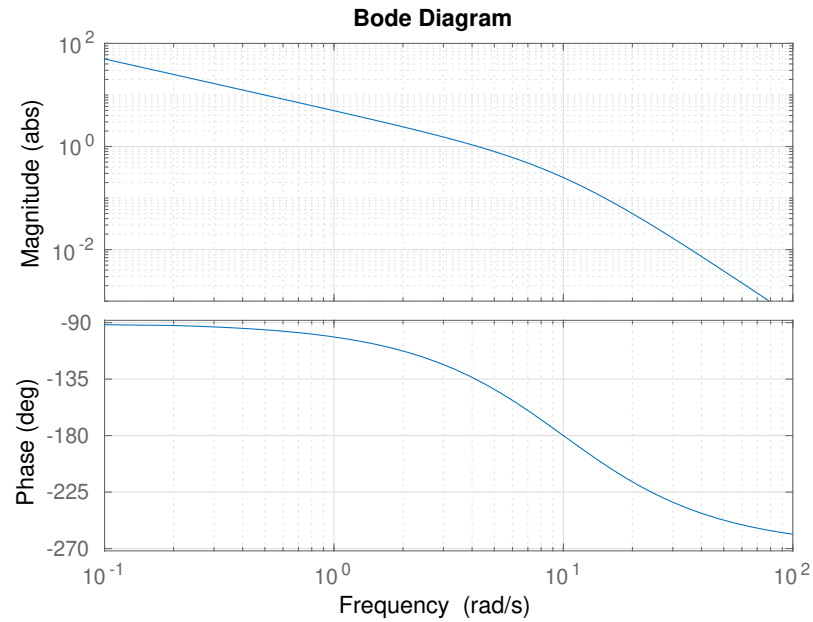


Figure 4: Kretsöverföringsfunktionen G_0 i problem 5.

- Beskriv kort vad syftet med fas- och amplitudmarginalerna är. Använd sedan figuren för att läsa av dem. (1 p)
- Som det är nu klarar det slutna systemet inte att följa rampändringar, utan vi får ett stationärt fel. Designa en kompenseringslänk som minskar det stationära felet med en faktor 5. (2 p)
- Betrakta nedanstående kompenseringslänk

$$G_K(s) = \frac{s + 10}{s + 1}$$

Varför skulle ett sådant tillägg till G_0 vara dåligt?

Ledning: Skissa kompenseringslänkens bodediagram!

(1 p)

Solution

- a. Fas- och amplitudmarginalerna är två olika mått på hur pass långt ifrån punkten -1 Nyquistkurvan befinner sig, då det slutna systemet skulle bli instabilt. $A_m = 4$ och $\phi_m = 45^\circ$.
- b. För att minska det stationära felet är det en fasretarderande länk vi måste designa. Vi kan se på bodediagrammet att kurvan lutar i början, varför G_0 måste innehålla en integrator. Därför kommer valet $M = 5$ att leda till att det stationära felet minskar med en faktor 5.

Skärfrekvensen ω_c kan vi avläsa till ungefär 4 rad/s. Tumregeln att välja parametern a som en tiondel av skärfrekvensen tillämpas, dvs. $a = 0.1\omega_c = 0.4$ rad/s. Vi får då länken

$$G_K(s) = \frac{s + 0.4}{s + 0.08}$$

- c. Förstår man tumregeln $a = 0.1\omega_c$ så gäller det bara att identifiera G_K som en fasretarderande länk med $a = 10$ och $M = 10$. I annat fall så skulle en snabb skiss av motsvarande bodediagram ge en kraftig sänka i faskurvan mellan brytfrekvenserna 1 rad/s och 10 rad/s – precis runt skärfrekvensen 4 rad/s. Detta skulle sänka fasmarginalen rejält, vilket i värsta fall leder till instabilitet. (Att G_K inte ändrar skärfrekvensen stort kan man övertyga sig om genom att betrakta dess förstärkningskurva och notera att $|G_K(4i)| \approx 2$)

6. The electronic circuit in Figure 5 is a bandstop filter. The relationship between the input and output voltage is given by

$$C\ddot{V}_{\text{out}} + \frac{1}{R}\dot{V}_{\text{out}} + \frac{1}{L}V_{\text{out}} = C\ddot{V}_{\text{in}} + \frac{1}{L}V_{\text{in}}.$$

- Find the transfer function $G(s)$ from V_{in} to V_{out} . (1 p)
- What is the gain of the circuit for an arbitrary frequency ω ? (0.5 p)
- At which frequency is the circuit gain 0 (the frequency that the circuit "stops")? (0.5 p)
- A disturbance V_D enters the system as illustrated in Figure 6. However, you're able to measure the disturbance and decide to add a feed-forward link G_{FF} to try to eliminate the effect of the disturbance. What is the new transfer function from V_D to V_{out} ? Choose G_{FF} to eliminate the effect of the disturbance V_D . (2 p)

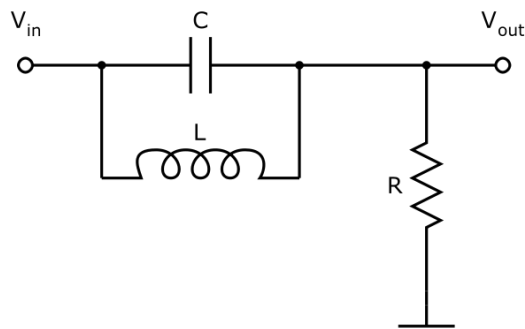


Figure 5: Passive electric bandstop filter in problem 6.

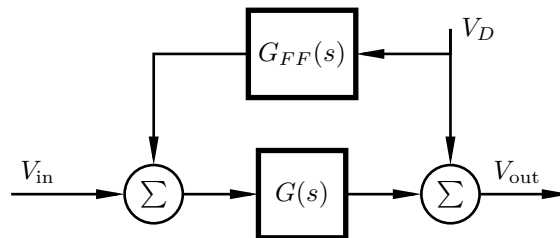


Figure 6: A block diagram illustrating the bandstop filter with disturbance voltage V_D and feed forward block G_{FF} from problem 6.

Solution

- a.** Laplace transformation of both sides of the differential equation gives

$$\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}V\right)V_{\text{out}}(s) = \left(Cs^2 + \frac{1}{L}\right)V_{\text{in}}(s).$$

Solving for $V_{\text{out}}(s)$ we get

$$V_{\text{out}}(s) = \frac{Cs^2 + \frac{1}{L}}{Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}}V_{\text{in}}(s) = \frac{RLCs^2 + R}{RLCs^2 + Ls + R}V_{\text{in}}(s),$$

and the transfer function from V_{in} to V_{out} is therefore

$$G(s) = \frac{RLCs^2 + R}{RLCs^2 + Ls + R}.$$

- b.** The circuits gain at frequency ω is given by

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{-RLC\omega^2 + R}{-RLC\omega^2 + Li\omega + R} \right| = \frac{|R(1 - LC\omega^2)|}{\sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}} \quad (1)$$

- c.** From (1) we see that $|G(i\omega)| = 0$ when $\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

- d.** The new transfer function of the closed loop system $G_{CL}(s)$ is given By

$$\begin{aligned} V_{\text{out}}(s) &= V_D(s) + G(s)(V_{\text{in}}(s) + G_{FF}(s)V_D(s)) \\ V_{\text{out}}(s) &= G(s)V_{\text{in}}(s) + (1 + G(s)G_{FF}(s))V_D(s) \end{aligned}$$

and the transfer function from $V_D(s)$ to $V_{\text{out}}(s)$ is seen to be $1 + G(s)G_{FF}(s)$.
Therefore, to eliminate $V_D(s)$ we solve

$$\begin{aligned} 1 + G(s)G_{FF}(s) &= 0 \\ G_{FF}(s) &= -\frac{1}{G(s)} \\ G_{FF}(s) &= -\frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLCs^2 + R} \end{aligned}$$