Reglerteknik AK – F5

- Stabilitet
- Återkoppling – Exempel

Stabilitet – definitioner

Vi använder tillståndsform för att definiera stabilitetsegenskaper:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad \text{(tillståndsekvation)}$$
$$y = Cx + Du \qquad \text{(mätekvation)}$$

Stabilitet är inre systemegenskap; definitionerna gäller då $u(t) = 0$:

Asymptotisk stabilitet: $x(t) \to 0$ då $t \to \infty$ för alla initialtillstånd

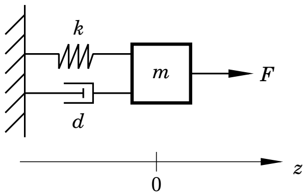
Stabilitet: $x(t)$ är begränsad då $t \to \infty$ för alla initialtillstånd

Instability: $x(t)$ obegränsad då $t \to \infty$ för något initialtillstånd

(**Marginellt stabilt**: Stabilt men ej asymptotiskt stabilt)

Exempel: Mekaniskt system

- Insignal: kraft F; tillstånd: position z och hastighet $\dot{z}$
- Är systemet stabilt, instabilt, eller asymptotiskt stabilt?



- Vid kontant $F > 0$, är z: >0, 0, eller <0 efter insvängning?
- Är systemet stabilt, instabilt, eller asymptotiskt stabilt?

Exempel

Pendel

Lösning till tillståndsformen – en variabel

- System med en tillståndsvariabel och en insignal

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$

- Lösning:

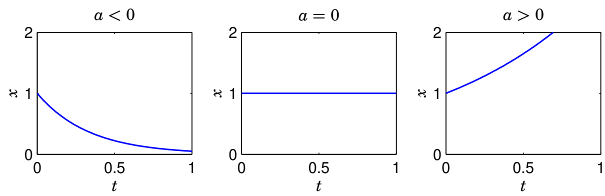
$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau$$

- Lösning med konstant insignal $u(t) = 0$ och $a \neq 0$:

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

Stabilitet i det skalära fallet

- Lösning då $u(t) = 0$: $x(t) = e^{at}x(0)$
- Lösningsplottar för $x(0) = 1$ och olika a:



  - asymptotiskt stabilt om $a < 0$
  - stabilt om $a \leq 0$
  - instabilt om $a > 0$

Lösning till tillståndsformen – generella fallet

- Tillståndsmodell (x är n-dimensionell vektor):

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

- Lösning:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

där e^{At} är exponentialmatrisfunktionen, definierad som

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

Stabilitet i generella fallet

- Lösning då $u(t) = 0$:

$$x(t) = e^{At}x(0) \qquad \Rightarrow \qquad e^{At} \text{ bestämmer stabilitet}$$

- Olika fall:
  - Asymptotiskt stabilt om $e^{At} \to 0$ då $t \to \infty$
  - Stabilt om e^{At} begränsad då $t \to \infty$
  - Instabilt om något element i e^{At} går mot oändligheten då $t \to \infty$
- Egenskaper för e^{At} bestäms av egenvärden till A

Stabilitet för diagonala system

- Antag A diagonal med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Då är

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

- Ger n stycken 1-dimensionella system $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$

Stabilitet för diagonala system

Olika fall:

- Asymptotiskt stabilt om alla 1D system as. stabila: alla $\lambda_i < 0$
- Stabilt om alla 1D system stabila: alla $\lambda_i \leq 0$
- Instabilt om något 1D system instabilt: något $\lambda_i > 0$

Stabilitet i generella fallet

Kan visa att:

- Asymptotiskt stabilt om alla $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$
- Stabilt om alla $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ och rent imaginära egenvärden har multiplicitet 1
- Instabilt om något $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$

Routh–Hurwitz stabilitetskriterier

Andra ordningens system (två tillstånd):

- karakteristiskt polynom (for 2×2-matrix A):

$$\det(\lambda I - A) = P(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_2$$

- Alla rötter i vänster halvplan ($\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$) om och endast om

$$p_1 > 0 \quad \text{och} \quad p_2 > 0$$

Tredje ordningens system (tre tillstånd):

- karakteristiskt polynom (for 3×3-matrix A):

$$\det(\lambda I - A) = P(\lambda) = \lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3$$

- Alla rötter i vänster halvplan om och endast om

$$p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0 \quad \text{och} \quad p_1 p_2 > p_3$$

Stabilitet för överföringsfunktioner

- Tillståndsform

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

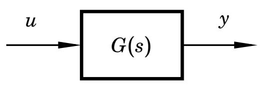
och överföringsfunktion

$$G(s) = \Big(C(sI - A)^{-1}B + D\Big)$$

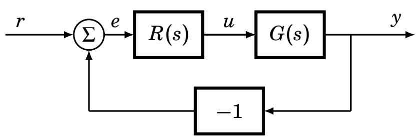
beskriver samma system
- Poler till $G(s) \iff$ egenvärden till A
- Därför: poler till överföringsfunktion $G(s)$ bestämmer stabilitet

Stabilitet – återkopplade system

- Vi har tittat på stabilitet för system på formen:

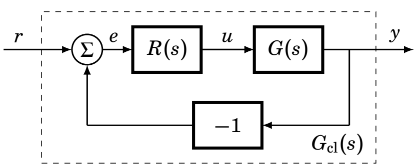


- Hur analysera stabilitet av återkopplade system?

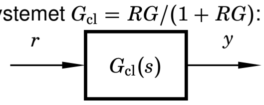


Stabilitet – återkopplade system

- Beräkna slutna systemets överföringsfunktion från r till y

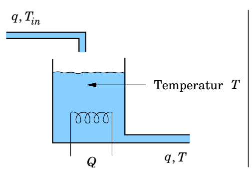


- Analysera slutna systemet $G_{\text{cl}} = RG/(1 + RG)$:



- Regulatordesign: Designa regulator R så G_{cl} beter sig önskvärt

Återkopplingsexempel: Temperaturreglering

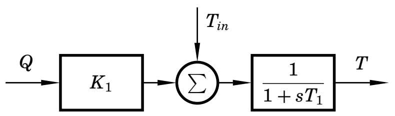


- Energibalans ger överföringsfunktion:

$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1}\Big(K_1 Q(s) + T_{in}(s)\Big)$$

- Mål: Håll $T = T_{ref}$ med Q trots variationer i T_{in}

Öppna systemet



Svar till steg i störning $T_{in} = 1$ (antag $Q = 0$):

$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1} T_{in}(s) = \frac{1}{s(1+sT_1)}$$

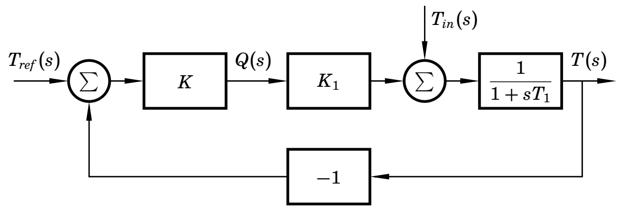
ger tidssvar

$$T(t) = 1 - e^{-t/T_1}$$

Stationäritet: $T = 1$

P-reglering

$$Q(t) = K\big(T_{ref}(t) - T(t)\big) = Ke(t)$$
$$Q(s) = K\big(T_{ref}(s) - T(s)\big) = KE(s)$$



P-reglering

$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1}\Big(K_1 K\big(T_{ref}(s) - T(s)\big) + T_{in}(s)\Big)$$

lös ut $T(s)$:

$$T(s) = \frac{K_1 K}{1+sT_1+K_1K} T_{ref}(s) + \frac{1}{1+sT_1+K_1K} T_{in}(s)$$

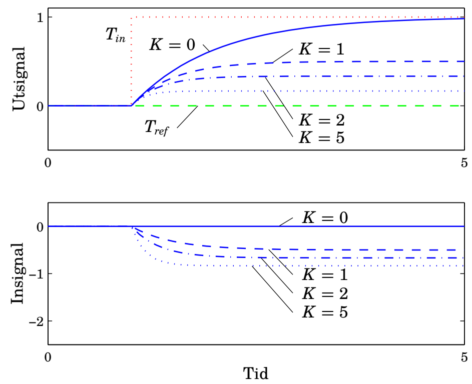
- Pol för återkopplat system:

$$s = -\frac{1+K_1K}{T_1}$$

- Asymptotiskt stabilt om $K > -1/K_1$
- Stationaritet ($s = 0$): $T = \dfrac{K_1K}{1+K_1K} T_{ref} + \dfrac{1}{1+K_1K} T_{in}$

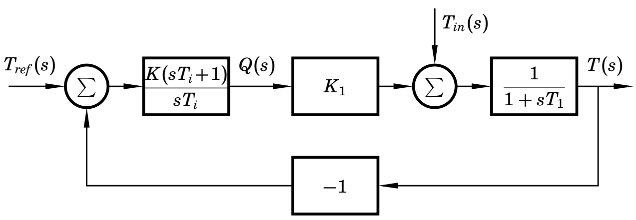
Simulering av stegstörning

Parametrar: $T_1 = K_1 = 1$:



PI-reglering

$$Q(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int^t e(\tau)\,d\tau\right)$$
$$Q(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)E(s)$$



PI-reglering

$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1}\left(\frac{K_1K(sT_i+1)}{sT_i}\Big(T_{ref}(s) - T(s)\Big) + T_{in}(s)\right)$$

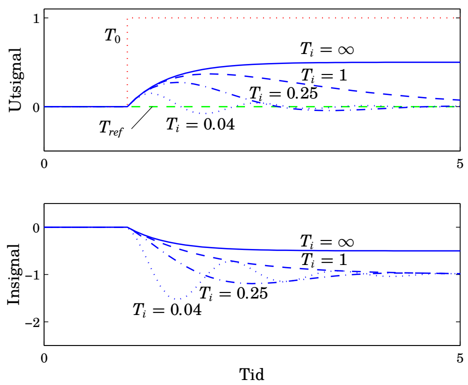
Lös ut $T(s)$:

$$T(s) = \frac{K_1K(sT_i+1)}{s^2T_1T_i + s(K_1K+1)T_i + K_1K} T_{ref}(s)$$
$$+ \frac{sT_i}{s^2T_1T_i + s(K_1K+1)T_i + K_1K} T_{in}(s)$$

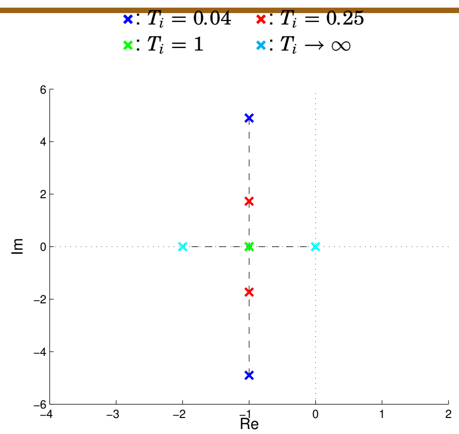
- Asymptotiskts stabilt om $K > -1/K_1$ och $KT_i > 0$
- Stationaritet ($s = 0$): $T = T_{ref}$

Simulering av stegstörning

Parametrar: $T_1 = K_1 = K = 1$:

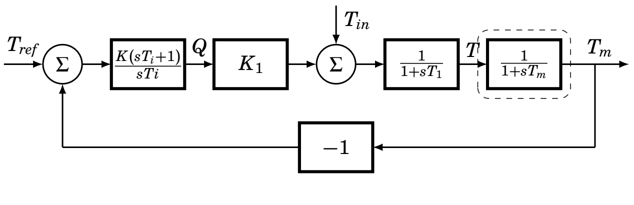


Rotort – Återkopplade systemets poler



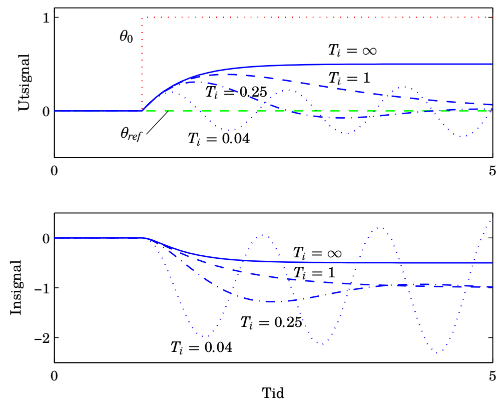
Känslighet för omodellerad dynamik

- Antag sensordynamik $T_m(s) = \dfrac{1}{1+sT_m} T(s)$
- Återkopplat system blir:



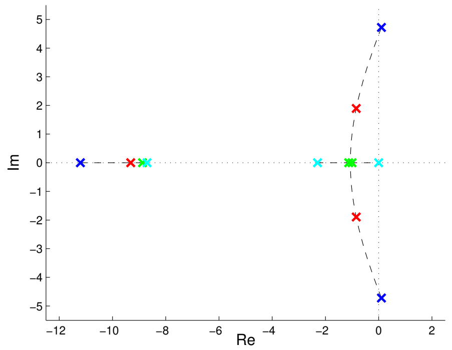
Simulering med omodellerad dynamik

Parametrar: $T_m = 0.1$, $T_1 = K_1 = K = 1$



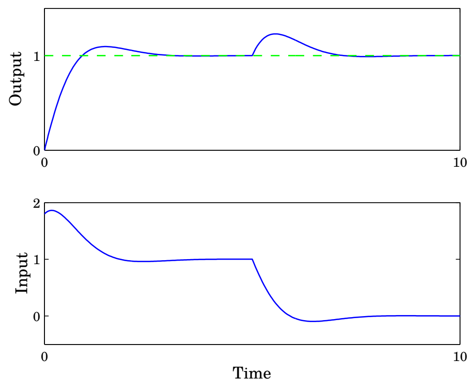
Rotort – återkopplat system med sensor

×: $T_i = 0.04$ ×: $T_i = 0.25$
×: $T_i = 1$ ×: $T_i \to \infty$



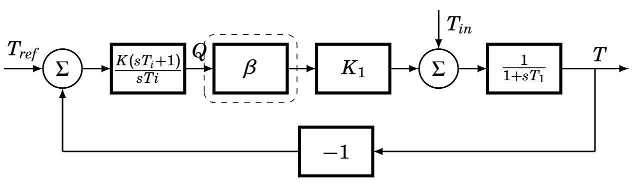
Simulering – steg i referens och störning

Parameters: $T = K_1 = 1$, $K = 1.8$, $T_i = 0.45$:



Känslighet mot parametervariationer

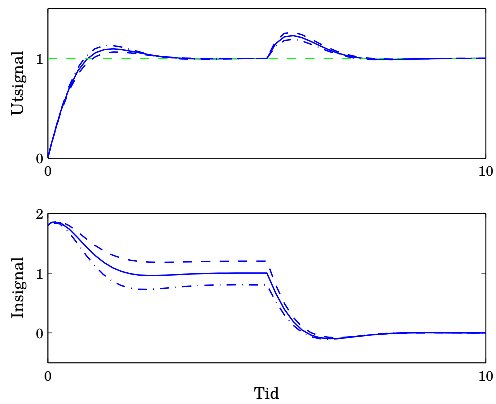
- Antag förstärkningsmodellen K_1 för Q är fel
- Återkopplat system:



med $\beta = 0.8, 1, 1.2$

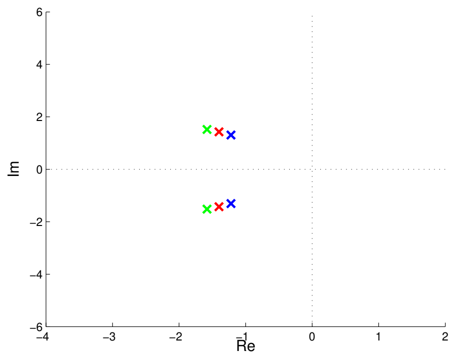
Simulering med fel förstärkning

Parametrar: $T = K_1 = 1$, $K = 1.8$, $T_i = 0.45$, $\pm 20\%$ förändring i Q



Rotort – återkopplat system, fel förstärkning

×: $\beta = 0.8$ ×: $\beta = 1$ ×: $\beta = 1.2$



Återkoppling

- Systemdynamik kan ändras med återkoppling
  - instabila system kan stabiliseras
  - välj regulatorparametrar för att placera poler för slutet system (*polplacering*)
- Önskat beteende för återkopplat system:
  - stabilitet av återkopplat system
  - snabbt och väldämpat svar
  - robusthet mot modellfel
  - undertrycka störningar