Lunds Universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 29 Oktober 2018 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Studera systemet som beskrivs av

$$G(s) = \frac{5}{s+4} - \frac{1}{s+1}.$$

a. Hitta systemets poler, nollställen och dess statiska förstärkning. (1 p)

b. Är systemet stabilt? Asymptotiskt stabilt? (1 p)

c. Bestäm ett uttryck, i tidsdomänen, för systemets impulssvar. (1 p)

Solution

a. Sammansättning av bråken ger

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{5}{s+4} - \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{4s+1}{(s+1)(s+4)}. \end{aligned}$$

Systemets poler bestäms till -1, -4. Nollställen bestäms till $-1/4$, och statiska förstärkningen blir $1/4$.

b. Eftersom systemet endast har poler i vänster halvplan så är det asymptotiskt stabilt och därmed också stabilt.

c. Impulssvaret $Y(s)$ ges av

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot 1 \\ &= \frac{5}{s+4} - \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Invers laplacetransform av termerna var för sig ger impulssvaret $y(t)$ som

$$y(t) = 5e^{-4t} - e^{-t}.$$

2. Ett system beskrivs av följande olinjära differentialekvation

$$\ddot{y} + \sin \dot{y} + \cos \dot{y} + y^2 = u$$

a. Inför tillstånden $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Bestäm alla stationära punkter. (1 p)

c. Linjärisera systemet kring den/de punkter du fann i deluppgift b. (1.5 p)

Solution

a. Lämpliga tillstånd kan till exempel vara $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$. Dessa tillstånd ger systemet

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 & (= f_1(x,u)) \\ \dot{x_2} = -\sin x_2 - \cos x_2 - x_1^2 + u & (= f_2(x,u)) \end{cases}$$

b. Alla stationära tillstånd ges av

$$\begin{cases} 0 = x_2^0 \\ 0 = -\sin x_2^0 - \cos x_2^0 - \left(x_1^0\right)^2 + u^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x_2^0 \\ 0 = -1 - \left(x_1^0\right)^2 + u^0. \end{cases}$$

vilket i sin tur resulterar i

$$(x_1^0,\ x_2^0,\ u^0) = (\alpha,\ 0,\ \alpha^2 + 1).$$

c. Hitta alla partiella derivator (i punkten (x_1^0, x_2^0, u^0))

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 & \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2x_1^0 = -2\alpha & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\cos x_2^0 + \sin x_2^0 = -1 & \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1 \end{array}$$

Utför ett variabelbyte

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_1^0 \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_2^0 \\ \Delta u &= u - u^0. \end{aligned}$$

Det linjära systemet ges nu av

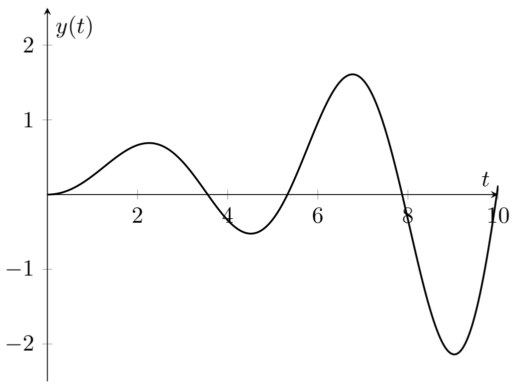
$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta u \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta u \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= -2\alpha\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u \end{aligned}$$

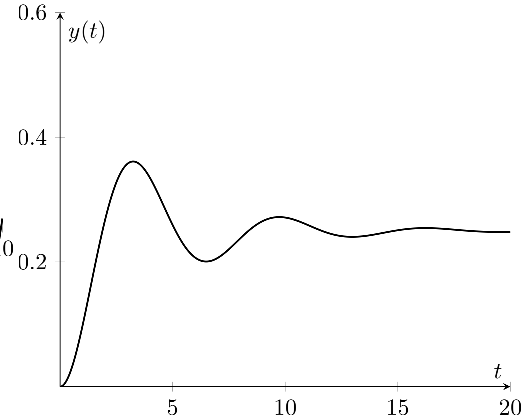
3. Givet stegsvaren A-E, identifiera vilken överföringsfunktion $G_1 - G_9$ som tillhör vilket stegsvar. För full poäng förväntas utförlig förklaring till lösningen. (2.5 p)

$$\begin{array}{ll} G_1(s) = \dfrac{1}{s+1} & G_2(s) = \dfrac{4}{s^2+3s+4} \\ G_3(s) = \dfrac{4-s}{s^2+3s+4} & G_4(s) = \dfrac{0.25}{s^2+0.5s+1} \\ G_5(s) = \dfrac{10}{s+10} & G_6(s) = \dfrac{0.5}{s^2-0.5s+2} \\ G_7(s) = \dfrac{4+s}{s^2+3s+8} & G_8(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+4} \\ G_9(s) = \dfrac{0.01}{s^2+0.15s+0.01} & \end{array}$$



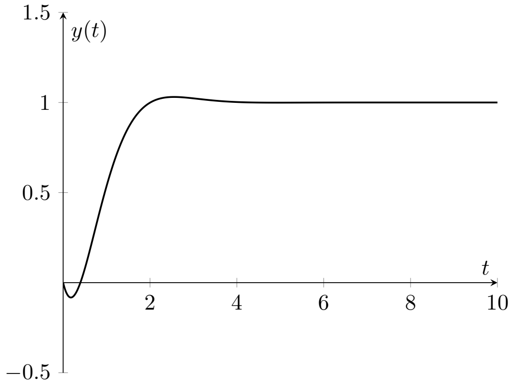
y(t)
2
1
−1
−2
t
2
4
6
8
10

A



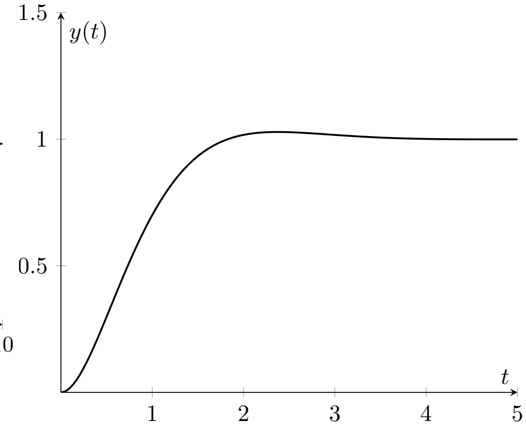
0.6
y(t)
0.4
0.2
t
5
10
15
20

B



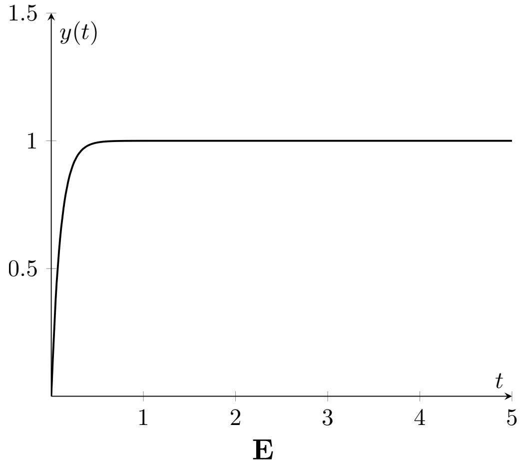
1.5
y(t)
1
0.5
−0.5
t
2
4
6
8
10

C



1.5
y(t)
1
0.5
t
1
2
3
4
5

D



1.5
y(t)
1
0.5
t
1
2
3
4
5

E

Solution

A Då **A** är tydligt instabil måste den tillhöra G_6 då det är den enda instabila processen vi har, eftersom alla andra har positiva koefficienter i nämnarpolynomet.

B Vi ser att vi har en stationär förstärkning på 0.25. Detta kan bara tillhöra G_4 och G_8. Då G_4 har en dämpningskonstant $\zeta = 0.25$ medan G_8 har en dämpningskonstant på $\zeta = 0.75$ måste **B** tillhöra process G_4 då vi har ett dåligt dämpat system.

C Då vi har en initial reaktion på stegsvaret som går åt fel håll måste processen innehålla ett nollställe i höger halvplan. Detta stämmer enbart överens med G_3.

D Vi har ett stationärt värde på stegsvaret som är 1 med en liten översläng och som når rätt värde väldigt snabbt. Detta innebär att vi har ett väldämpat, andra ordningens system med statiska förstärkningen 1. Det finns två andra ordningens system med stationär förstärkning 1, G_2 och G_9. De har samma dämpningskonstant men G_2 är mycket snabbare än G_9 då $\omega_2 = 2$ medan $\omega_9 = 0.1$. Därför tillhör **D** G_2.

E Vi har ett första ordningens system (ingen översläng och nollskiljd begynnelsederivata). Det finns två system som stämmer in på detta: G_1 och G_5. Det som skiljer systemen åt är att G_1 har en tidskonstant $T = 1$ och G_5 har en tidskonstant på $T = 0.1$. Tidskonstanten beskriver hur snabbt en process når 63% av sitt slutgiltiga värde. Därför är G_5 10 gånger snabbare än G_1 vilket medför att **E** tillhör G_5.

Detta medför att $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\text{A} &\Leftrightarrow G_6\\
\text{B} &\Leftrightarrow G_4\\
\text{C} &\Leftrightarrow G_3\\
\text{D} &\Leftrightarrow G_2\\
\text{E} &\Leftrightarrow G_5
\end{aligned}
$$

4. En inverterad pendel kan beskrivas med följande system

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u\\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x
\end{aligned}
$$

a. Ta fram en tillståndsåterkoppling så att det återkopplade systemets poler hamnar i $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$. (2 p)

b. Då vi inte kan mäta alla tillstånd hos vår inverterade pendel inför vi ett Kalmanfilter för att estimera tillstånden. Designa ett Kalmanfilter så att filtrets poler blir 2 gånger snabbare än tillståndåterkopplingens. (2 p)

c. Rita blockdiagrammet för ditt färdiga system, med tillståndsåterkoppling och Kalmanfilter. (1 p)

Solution

a. Styrlagen för en tillståndsåterkoppling, $u = -Lx + l_r r$ $(L = [l_1, l_2])$, ger följande tillståndsekvation

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(-Lx + l_r r) = (A - BL)x + Bl_r r \\ y &= Cx \end{aligned}$$

där polerna ges av egenvärdena till systemmatrisen

$$\det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 - l_1 & s - l_2 \end{vmatrix} = s^2 - l_2 s - (1 + l_1).$$

Efter matchning med modellpolynomet fås resultatet

$$\begin{aligned} l_1 &= -1 - \omega^2 \\ l_2 &= -2\zeta\omega \end{aligned}$$

b. Att Kalmanfiltrets poler är 2 gånger snabbare än tillståndåterkopplingens poler innebär att vi söker det karakteristiska polynomet $s^2 + 2\zeta(2\omega)s + (2\omega)^2 = s^2 + 4\zeta\omega + 4\omega^2$.

Ett Kalmanfilter ger följande ekvation

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

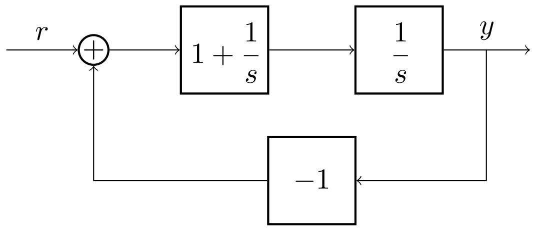
där polerna ges av egenvärdena till systemmatrisen

$$\det(sI - (A - KC)) = \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ -1 + k_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + k_1 s - 1 + k_2$$

Efter matchning med modellpolynomet fås resultatet

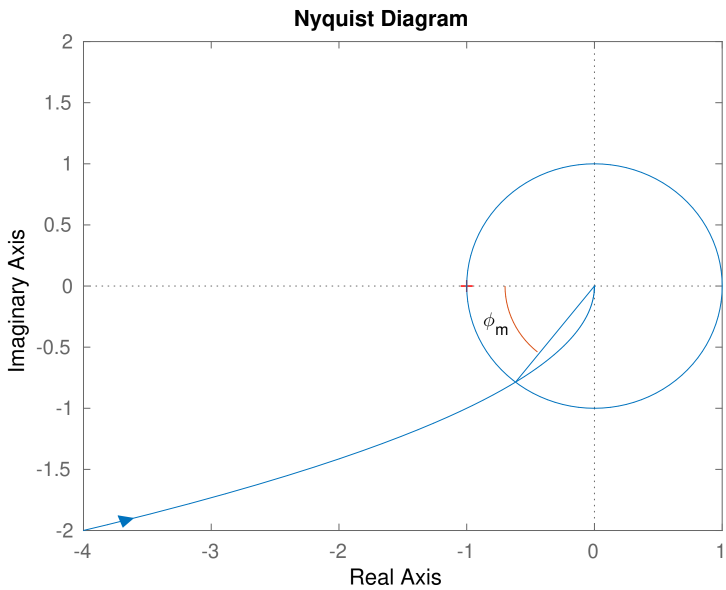
$$\begin{aligned} k_1 &= 4\zeta\omega \\ k_2 &= 1 + 4\omega^2 \end{aligned}$$

5. Studera systemet i Figur 3.



Figur 3: Systemet i Problem 5.

a. Ta fram kretsöverföringsfunktionen. (0.5 p)



Figur 4: Nyquistdiagram för lösningen till Problem 5.

b. Skissa nyquistdiagrammet och markera amplitudmarginal A_m och fasmarginal φ_m om de existerar. (1 p)

c. Räkna ut amplitudmarginal A_m, fasmarginal φ_m och dödtidsmarginal L_m (1.5 p)

Solution

a. Kretsöverföringsfunktionen är

$$G_0(s) = G_p(s) \cdot G_r(s) = (\frac{1}{s} + 1) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s^2}$$

b. Fasmarginalen finns och kan tillsammans med nyquistdiagrammet ses i Figur 4. Amplitudmarginalen är oändlig då nyquistkurvan aldrig korsar negativa reella axeln.

c. För att räkna ut φ_m börjar vi med att ta fram ω_c.

$$\begin{aligned}
|G_0(i\omega_c)| = \left|\frac{i\omega_c + 1}{-\omega_c^2}\right| = 1 \Rightarrow& \\
\sqrt{\omega_c^2 + 1} = \omega_c^2 &\Rightarrow \omega_c^4 - \omega_c^2 - 1 = 0 \\
\omega_c^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} &\Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.272
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_m &= \pi + \arg(G_0(i\omega_c)) = \pi + \arg\left(\frac{i\omega_c + 1}{-\omega_c^2}\right) \\
&= \pi + \arg(i\omega_c + 1) - \arg(-\omega_c^2) = \pi + \arctan(\omega_c) - \pi \approx 0.9045
\end{aligned}$$

Dödtidsmarginalen blir,

$$L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c} \approx 0.7111.$$

För att räkna ut A_m börjar vi med att ta fram ω_0.

$$\begin{aligned}\arg(G_0(i\omega_0)) &= \arg\left(\frac{i\omega_0+1}{-\omega_0^2}\right) = -\pi \\ \arctan(\omega_0) - \pi &= -\pi \\ \omega_0 &= \arctan(0) = 0\end{aligned}$$

Detta innebär att vi aldrig korsar negativa realla axeln och därmed får en oändlig amplitudmarginal.

6. På KFS trycker man varje läsperiod böcker till de kurser som går. Det har dock tagits in fler studenter på LTH på sistone och böckerna behöver därför tryckas snabbare för att alla ska kunna köpa.

Anta att maskinen som trycker böckerna har dynamiken

$$G_p(s) = \frac{s+10}{3s(s+1)(s+2)^2}.$$

En reglertekniker (som brukar beställa böcker åt institutionen) föreslår en kompenseringslänk som gör systemet 50% snabbare utan att fasmarginalen försämras. Hjälp honom designa en kompenseringslänk som uppfyller dessa kriterier. (3 p)

Solution

Vi vill göra vårt system snabbare utan att förlora någon stabilitet i form av fasmarginal. Detta implicerar en fasavancerande länk.

Vi börjar med att ta fram vår nuvarande skärfrekvens som

$$|G(i\omega_c)| = \frac{\sqrt{\omega_c^2+100}}{3\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1}(\omega_c^2+4)} = 1 \Rightarrow \omega_c = 0.64.$$

Eftersom vi ville att systemet skulle bli 50% snabbare måste $\omega_c^* = 1.5\omega_c = 0.96$.

Vi behöver nu hitta fasen vid den gamla respektive den nya skärfrekvensen.

$$\begin{aligned}\arg G_p(i\omega_c) &= \arctan\frac{\omega_c}{10} - \frac{\pi}{2} - \arctan\omega_c - 2\arctan\frac{\omega_c}{2} = -154.4^\circ \\ \arg G_p(i\omega_c^*) &= \arctan\frac{\omega_c*}{10} - \frac{\pi}{2} - \arctan\omega_c* - 2\arctan\frac{\omega_c*}{2} = -179.6^\circ\end{aligned}$$

För att fasen på den kompenserade processen ska hållas på samma nivå eller förbättras måste $\arg G_k(i\omega_c^*)G_p(i\omega_c^*) \geq \arg G_p(i\omega_c)$. Detta innebär att $N \approx 2.5$.

Vi vill nu placera kompenseringslänkens fasökning på den nya skärfrekvensen. Detta görs genom att placera

$$b = \frac{\omega_c^*}{\sqrt{N}} = 0.61.$$

Det sista vi vill göra är att bestämma kompenseringslänkens förstärkning så att det nya systemet har förstärkningen 1 vid den nya skärfrekvensen.

$$|G_k(i\omega_c^*)G_p(i\omega_c^*)| = K_k\sqrt{N}|G_p(i\omega_c^*)| = K_k 0.72 = 1 \Rightarrow K_k = 1.24$$

Den resulterande länken blir då

$$G_k(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN} = 3.1\frac{s+0.61}{s+1.53}$$

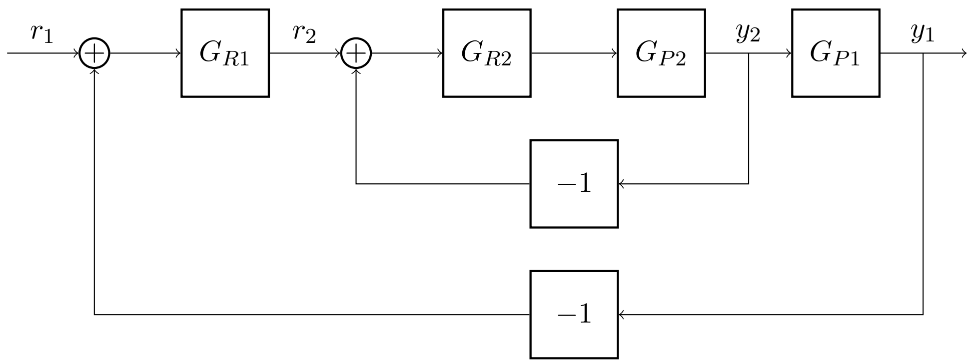
7. I labb 1 nämndes lite snabbt att pumpen vi använde inte var proportionell mot spänningen men att det fanns en inre regulator med återkoppling på flödet så att vi kunde anta att den var proportionell. Idag ska vi se om vi kan designa en sådan regulator för ett enkelt tanksystem med bara en behållare. Regulatorstrukturen kan ses i figur 5.

Om vi antar samma dynamik som i labben så blir G_{p1} efter linjärisering på formen

$$G_{p1} = \frac{K}{s+a}.$$

Låt oss anta att $K = 1$ och $a = 0.1$ i detta fallet. Pumpen antar vi kan modelleras enligt

$$G_{p2} = \frac{1}{s(s+5)}.$$



Figur 5: Kaskadregulator för Problem 7.

a. Beräkna en P-regulator för pumpen (G_{r2}) som gör att de komplexkonjugerade polerna hos det inre slutna systemet (G_2) hamnar 30 gånger längre från origo än tankprocessens pol. (2 p)

b. Vad får inre slutna systemet för relativ dämpning med denna regulatorn? Vad blir dess statiska förstärkning? (1 p)

c. Om det yttre systemet designas så att det är tillräckligt mycket långsammare än det inre systemet kan det inre systemet uppskattas med dess statiska förstärkning. Beräkna en PI-regulator för tanken (G_{r1}) med poler som är en faktor 10 närmare origo än det inre slutna systemets poler, uppskatta det inre systemet med dess statiska förstärkning. (2 p)

Solution

a. $G_{r2} = K$ ger att

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{G_{r2}G_{p2}}{1+G_{r2}G_{p2}} \\ &= \frac{K\frac{1}{s(s+5)}}{1+K\frac{1}{s(s+5)}} \\ &= \frac{K}{s^2+5s+K} \end{aligned}$$

Identifiering med $s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2$, där $\omega_0 = 30\cdot 0.1 = 3$ då vi ville ha systemet 30 gånger snabbare än tankprocessen, ger $K = 9$ och $\zeta = \frac{5}{6}$.

b. Dämpningen ges av $\zeta = \frac{5}{6}$ från föregående uppgift. Statiska förstärkningen ges av $G_2(0) = 1$

c. $G_{r1} = K_1\left(1+\frac{1}{sT_i}\right) = K_1\frac{s+\frac{1}{T_i}}{s}$ ger att

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{G_{r1}G_{p1}}{1+G_{r1}G_{p1}} \\ &= \frac{K_1\frac{s+\frac{1}{T_i}}{s}\frac{1}{s+0.1}}{1+K_1\frac{s+\frac{1}{T_i}}{s}\frac{1}{s+0.1}} \\ &= \frac{K_1\left(s+\frac{1}{T_i}\right)}{s^2+(K_1+0.1)s+\frac{K_1}{T_i}} \end{aligned}$$

Polerna ska vara en faktor 10 närmare origo så vi har $\omega_0 = 0.3$ och $\zeta = 5/6$. Identifiering ger

$$\begin{aligned} K_1+0.1 = 2\zeta\omega_0 \quad &\rightarrow \quad K_1 = 2\zeta\omega_0 - 0.1 = 0.4 \\ \frac{K_1}{T_i} = \omega_0^2 \quad &\rightarrow \quad T_i = \frac{K_1}{\omega_0^2} = \frac{40}{9} \end{aligned}$$