LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 27 augusti 2018 kl 14–19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

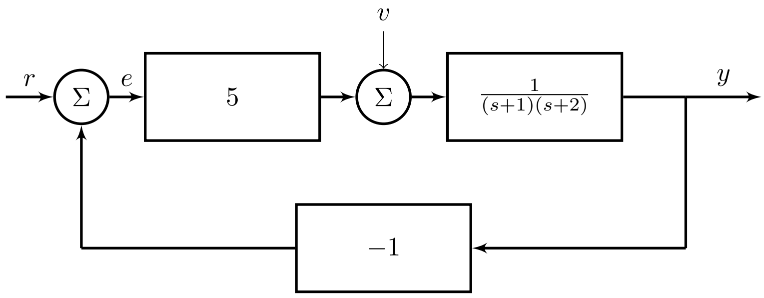
Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.



Figur 1: Blockschema för uppgift 1

1. Vi har ett system vars blockschema visas i Figur 1

a. Bestäm överföringsfunktionerna från r till y, från r till e och från v till e. (2 p)

b. Vid en viss tidpunkt börjar en laststörning v i form utav ett enhetssteg att påverka systemet. Kommer vi att få något kvarstående reglerfel? Om ja, föreslå en förbättring av regulatorn sådan att reglerfelet försvinner.

Man kan anta att $r = 0$. Motiveringar krävs, men inga uträkningar behövs visas. (1 p)

Solution

a. Överföringsfunktionerna blir det följande

$$
\begin{aligned}
G_{ry} &= \frac{G_r G_p}{1 + G_r G_p} = \cdots = \frac{5}{s^2 + 3s + 7} \\
G_{re} &= \frac{1}{1 + G_r G_p} = \cdots = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 7} \\
G_{ve} &= -\frac{G_p}{1 + G_r G_p} = \cdots = \frac{-1}{s^2 + 3s + 7}
\end{aligned}
$$

b. Eftersom att systemet saknar integrator så kommer vi att få ett kvarstående reglerfel då laststörningen är ett steg. Genom att införa en integrator, tex att göra om P regulatorn till en PI regulator så skulle vi kunna motverka felet.

2. Ett system beskrivs av följande olinjära differentialekvation

$$\ddot{y} + y\dot{y} + 2y = 5u.$$

a. Inför tillstånden $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ och ställ upp systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Hitta alla stationära punkter till det olinjära systemet. (1 p)

c. Linjärisera systemet kring den stationära punkt där $u^0 = 2$. (2 p)

d. Bestäm det linjäriserade systemets överföringsfunktion. (1 p)

Solution

a. Derivering av tillstånden och sedan substitution ger följande

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 && = f_1(x_1, x_2, u), \\
\dot{x}_2 &= -x_1 x_2 - 2x_1 + 5u && = f_2(x_1, x_2, u), \\
y &= x_1 && = g(x_1, x_2, u).
\end{aligned}
$$

b. Genom att sätta de två tillståndsderivatorna till 0 kan vi räkna ut de stationära punkterna.

$$
\begin{cases}
0 = x_2^0, \\
0 = -x_1^0 x_2^0 - 2x_1^0 + 5u^0, \\
y = x_1^0.
\end{cases}
\implies
\begin{cases}
u^0 = t, \\
x_1^0 = \frac{5}{2} t, \\
x_2^0 = 0, \\
y^0 = x_1^0.
\end{cases}
$$

c. Den stationära punkten för $u^0 = 2$ blir $(u^0, x_1^0, x_2^0, y^0) = (2, 5, 0, 5)$. De nya tillstånden blir

$$
\begin{cases}
\Delta u = u - u^0, \\
\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \\
\Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \\
\Delta y = y - y^0.
\end{cases}
$$

De partiella derivatorna för linjäriseringen blir

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\
\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial u}
\end{bmatrix}
\left(x_1^0, x_2^0, u^0\right) =
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
-x_2^0 - 2 & -x_1^0 & 5 \\
1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 \\
-2 & -5 & 5 \\
1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Det linjäriserade systemt får således följande tillståndsform

$$
\begin{cases}
\dot{\Delta x}_1 = \Delta x_2, \\
\dot{\Delta x}_2 = -2\Delta x_1 - 5\Delta x_2 + 5\Delta u, \\
\Delta y = \Delta x_1
\end{cases}
$$

d. Från föregående delproblem har vi de följand systemmatriserna för det linjäriserade systemet.

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}
$$
$$
C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 0
$$

Formel ger oss att överföringsfunktionen kan räknas ut via

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{1}$$

Inversen räknas ut via formel och blir

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s^2 + 5s + 2} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Med inversen uträknad kan ekvation (1) räknas ut

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{5}{s^2 + 5s + 2}$$

3. Vi vill undersöka några egenskaper hos följande system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

a. Anta att systemets tillståndsvektor initialt är $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Är det möjligt att för en godtycklig given tillståndsvektor $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ välja styrsignalen $u(t)$ så att systemets tillstånd sammanfaller med denna tillståndsvektor vid någon tidpunkt $t < \infty$? (1 p)

b. Finns det någon tillståndsvektor $x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 \end{bmatrix}^T \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ sådan att ifall systemets initialtillstånd är $x(0) = x^0$ och insignalen är $u(t) = 0$ så blir utsignalen $y(t) = 0$? (1 p)

c. Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ för systemet. (1 p)

Solution

a. Detta är definitionen av *styrbarhet*. Påståendet stämmer, d.v.s. systemet är styrbart, om och endast om styrbarhetsmatrisen

$$W_s = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

har linjärt oberoende kolonner. Matriserna A och B ges av

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får därmed

$$W_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Kolonnerna i en kvadratisk matris är oberoende om och endast om determinanten är nollskiljd. Eftersom

$$\det W_s = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

är systemet alltså styrbart, och svaret på frågan är därmed ja.

b. Enligt definitionen av *observerbarhet* gäller det att systemet *inte* är observerbart ifall någon vektor enligt beskrivningen (en så kallad icke observerbar eller tyst tillståndsvektor) existerar. Systemet är observerbart om och endast om observerbarhetsmatrisen

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

har linjärt oberoende rader. Matrisen C ges av

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså

$$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

En kvadratisk matris har linjärt oberoende rader om och endast om determinanten är nollskiljd. Eftersom

$$\det W_o = 1 \neq 0$$

är systemet alltså observerbart. Därmed finns inga icke observerbara tillståndsvektorer, och svart på frågan är nej.

c. Vi har tillståndsformen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned} sX &= AX + BU \\ Y &= CX. \end{aligned}$$

Utbrytning av X från den första ekvationen ger

$$X = (sI - A)^{-1}BU$$

och insättning i den andra ekvationen ger

$$Y = C(sI - A)^{-1}BU.$$

Överföringsfunktionen blir alltså

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Inversen beräknas enligt

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

och därmed får vi

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 \\ s+2 \end{bmatrix} = \frac{s+3}{(s+2)^2}. \end{aligned}$$

4. Varje Nyquist- och Bodediagram i figur 2 beskriver ett system vars stegsvar visas i figur 3 (i en annan ordning). Para ihop Bode- och Nyquistdiagrammen (A-F) i figur 2 med stegsvaren (1-6) i figur 3 och motivera svaren. (3 p)

Solution

Stegsvar 6 är det enda stegsvar som har en dödtid (på en sekund). En dödtid (tidsfördröjning) innebär att systemets fasförskjutning går mot $-\infty$ för höga frekvenser, till skillnad från system utan tidsfördröjning av ändlig ordning, för vilka fasen som minst kan bli $-n\pi/2$, där n är systemets ordning (polpolynomets gradtal). Man kan förstå fenomenet genom att om det finns en fördröjning på, säg en sekund, så motsvarar detta väldigt många svängningar hos en signal med hög frekvens, varför fasförskjutningen blir stor för signaler med hög frekvens. I frekvensdiagrammen B-F är fasförskjutningen begränsad för höga frekvenser, men för Nyquistdiagram A snurrar kurvan oändligt många varv runt origo i negativ riktning (samtidigt som amplituden, d.v.s. förstärkningen, avtar), vilket innebär att fasen går mot $-\infty$. Alltså måste det gälla att **A** $\leftrightarrow$ **6**.

Bodediagrammen C och D motsvarar andra ordningens system. Detta kan ses genom att lutningen på amplitudkurvan ändras från 0 till -2, samtidigt som fasen ändras från $0°$ till $-180°$. Detta innebär att det måste finnas minst två poler hos systemen. Eftersom amplitudkurvorna har lutningen noll för låga frekvenser och lutningen aldrig ökar så har systemen inga nollställen. Därmed har systemen två poler och inga nollställen.

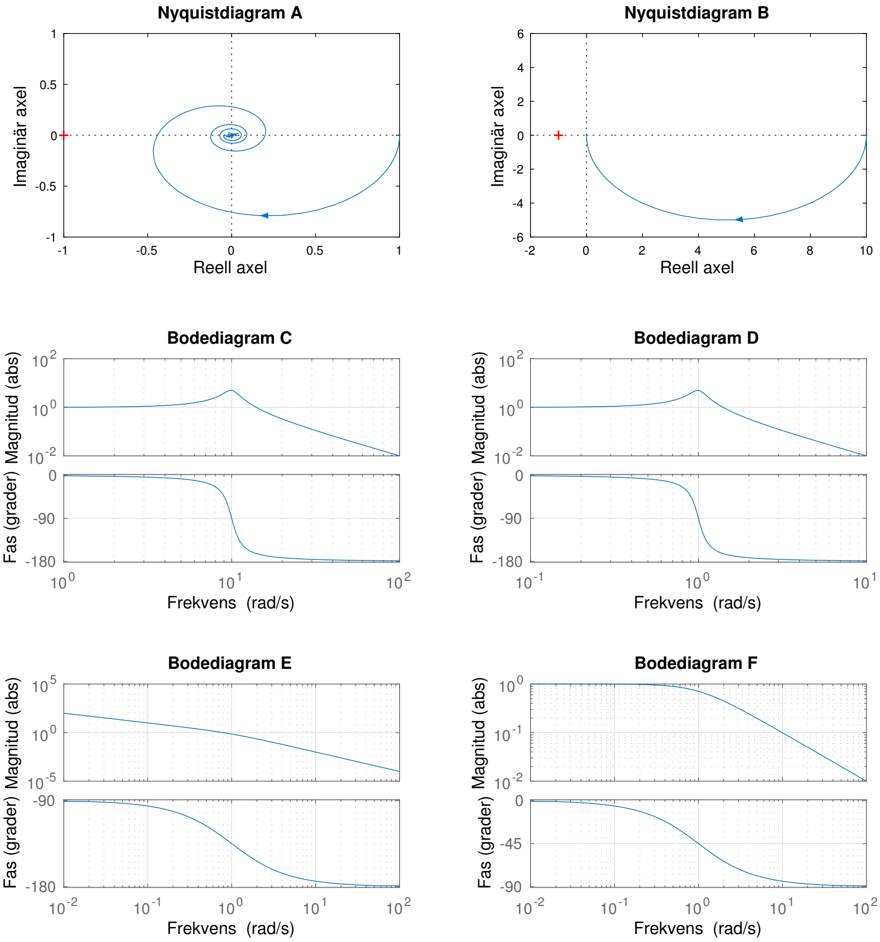
På liknande sätt ser man att systemet motsvarande F är av första ordningen, eftersom lutningen på amplitudkurvan initialt är noll och lutningen ändras till -1, och i övrigt inte ändras, varför systemet inte har några nollställen och har en pol. I Nyquistdiagram B ser man att systemets fasförskjutning går monotont från $0°$ till $-90°$, varför även detta måste vara ett förstaordningssystem med en pol och utan nollställen.

För att få överslängar och oscillationer i stegsvaret krävs icke-reella poler, vilket kräver system av minst ordning 2. Därmed måste stegsvar 1 och 3 tillhöra andraordningssystemen C och D. C har en resonanstopp vid 10 rad/s vilket innebär att signalkomponenter kring denna frekvens förstärks. På samma sätt förstärker system D frekvenser kring 1 rad/s. Eftersom oscillationerna hos system 1 har lägre frekvens (längre period) än hos system 3 måste det alltså gälla att **D** $\leftrightarrow$ **1** och **C** $\leftrightarrow$ **3**.

Lågfrekvensasymptoten för Bodediagram E har lutningen -1, vilket innebär att systemet har en pol i origo: $s = 0$. Detta innebär i sin tur att överföringsfunktionen innehåller en integrator. Därmed integreras insignalen som är konstant $u(t) = 1$ för $t > 0$, vilket gör att stegsvaret går mot oändligheten. Därmed gäller det att **E** $\leftrightarrow$ **5**.

För de återstående systemen kan vi avläsa att $G(0) = 10$ för B och $G(0) = 1$ för F, vilket motsvarar den statiska förstärkningen för respektive system. Genom att jämföra med den statiska förstärkningen för stegsvaren får vi alltså **F** $\leftrightarrow$ **2** och **B** $\leftrightarrow$ **4**.

5. Systemet vars Bodediagram visas i Figur 4 regleras genom återkoppling. Går någon av kompenseringslänkarna i Figur 5 att använda för att uppnå följande



Figur 2: Nyquist- och Bodediagram A-F tillhörande uppgift 4.

mål? I så fall, vilken/vilka? Motivera dina svar. (4 p)

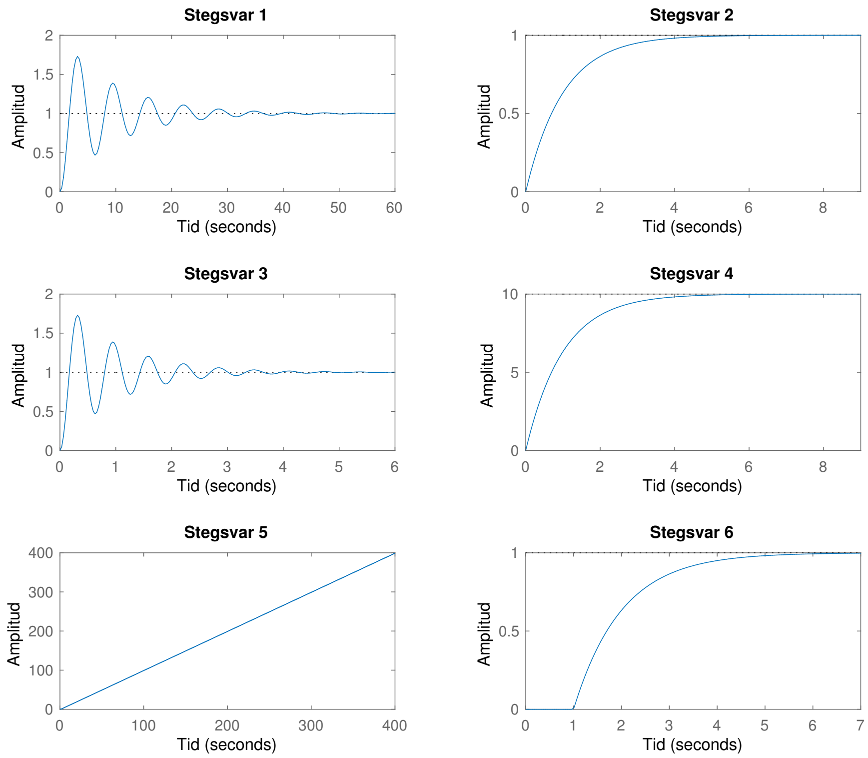
a. Eliminera stationära fel för stegändringar i referensvärde.

b. Minska stationära fel.

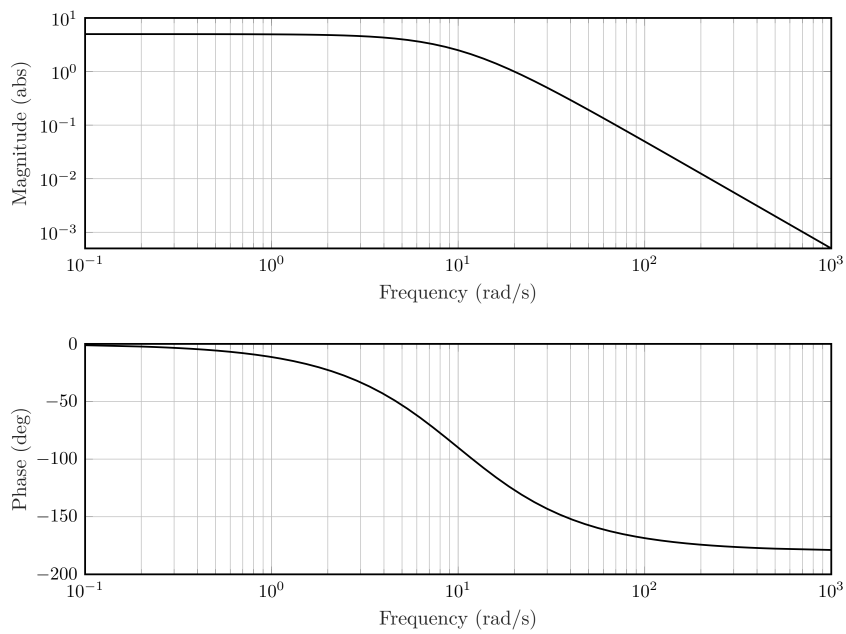
c. Göra systemet robustare.

d. Göra systemet snabbare.

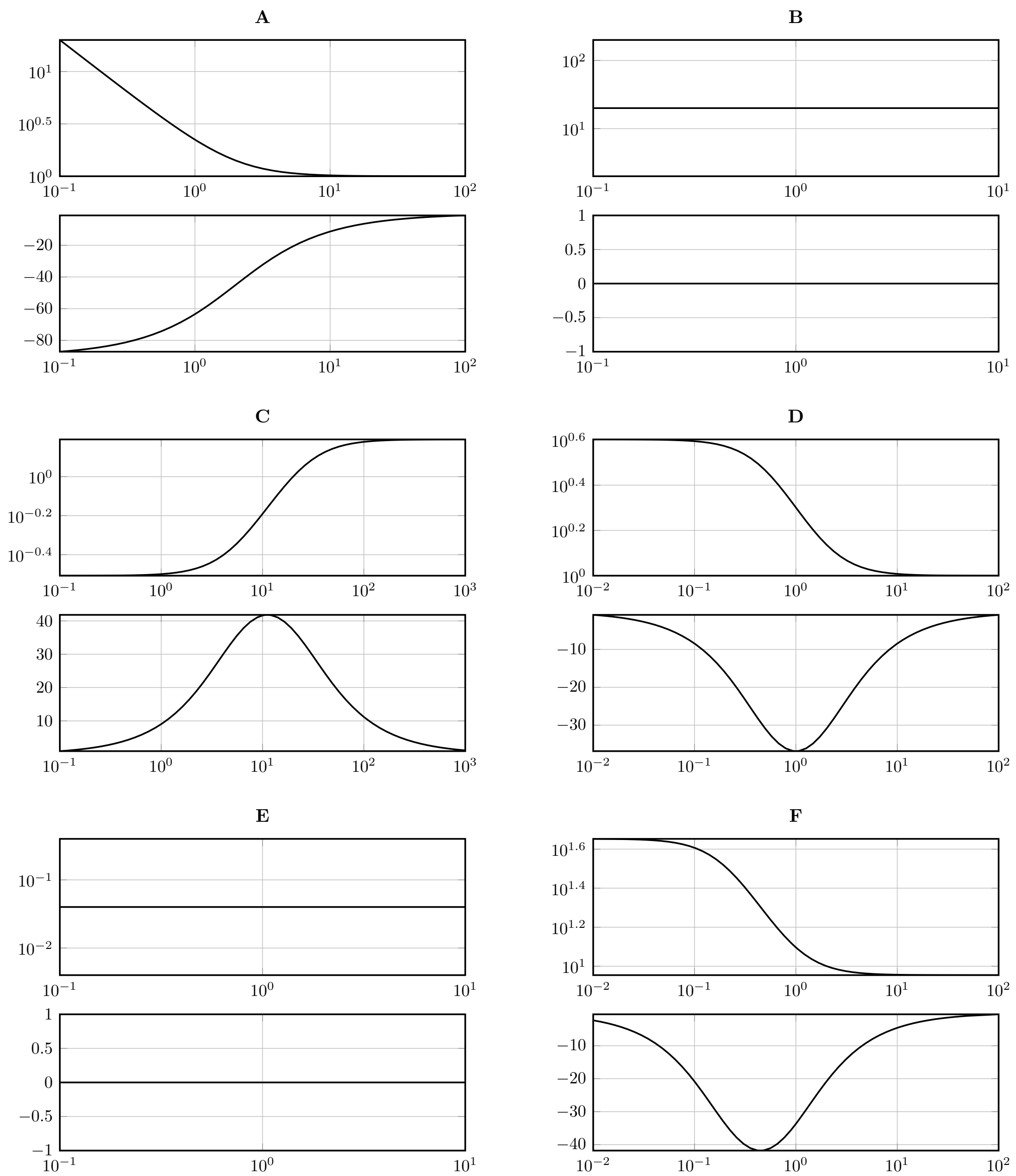
e. Göra systemet långsammare.



Figur 3: Stegsvar 1-6 tillhörande uppgift 4.



Figur 4: Bodediagram för systemet i uppgift 5



Figur 5: Bodediagram för kompenseringslänkarna i uppgift 5

Solution

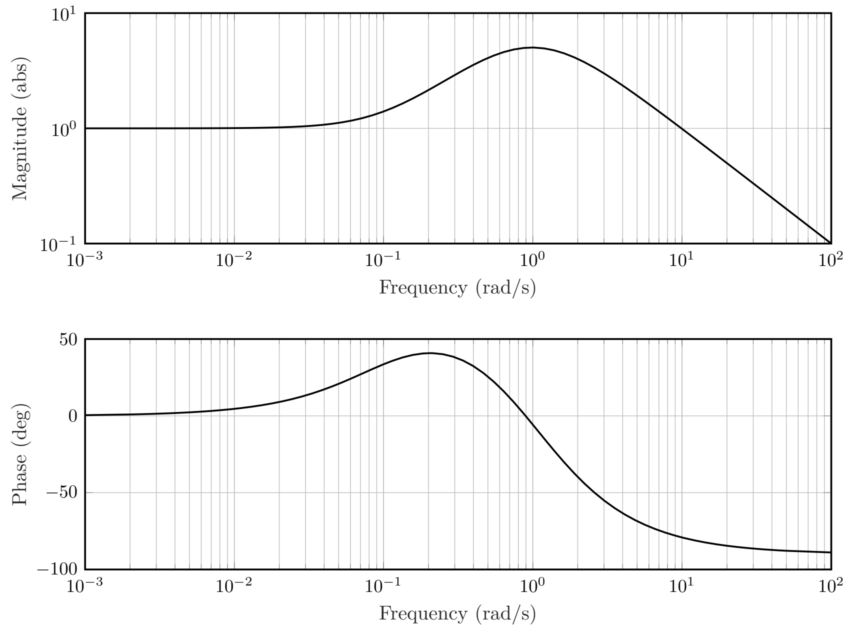
a. För att eliminear stationära felet måste förstärkningen gå mot oändligheten för låga frekvenser ⇒ bara A går att använda.

b. För att minska stationära fel räcker det med att man höjer den förstärkningen för "frekvens" 0. Då vi inte har några andra krav så fungerar alla av A, B, D och F

c. Robustare betyder att höja stabilitets marginalerna och då amplitudmarginalen är oändlig ska fasmarginalen höjas. Detta kan göras genom att lyfta fasen direkt med den fasavancerade länken i C. Man kan också göra det genom att sänka skärfrekvensen med en länk som har förstärkning mindre än 1 i ett område kring skärfrekvensen. Det är enbart E som uppfyller det kriteriet.

d. Snabbare innebär högre skärfrekvens. Uppnås av alla länkar som har förstärkning större än 1 i ett område kring skärfrekvensen. A, B, D och G fungerar alla här. (Även om A och D båda tekniskt sett har en förstärkning över 1 så är dom dåliga val om målet är att höja skärfrekvensen då förstärkningen är väldigt lite över 1.) C har en förstärkning över 1 på en sida om skärfrekvensen men flyttar inte skärfrekvensen då förstärkingen är 1 just för skärfrekvens.

e. Analogt men omvänt resonemanget i föregående uppgift är det bara E som sänker skärfrekvensen.



Figur 6: Bodediagram för uppgift 6

6. Bodediagramet för ett system visas i Figur 6. Systemet återkopplas enkelt med en proportional regulator med förstärkning K.

a. Hur stor kan förstärkningen K vara utan att det slutna systemet blir instabilt? (1 p)

b. Skulle en människa kunna reglera den slutna processen? Räkna med att en människas reaktionstid är 200 ms. (1 p)

c. För vilka frekvenser kommer återkopplingen dämpa mätstörningar relativt det öppna systemet? (1 p)

Solution

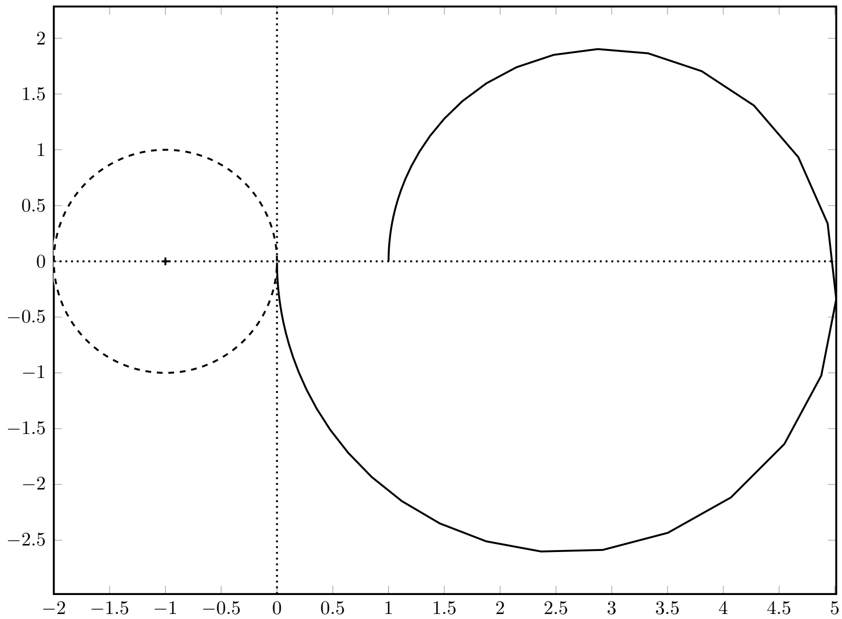
a. Faskurvan skär aldrig -180 grader så förstärkningsmarginalen är oändlig $\Rightarrow K < \infty$

b. Skärfrekvensen är 10 rad/s vilket ger en fasmarginal på 75 grader. Dödtidsmarginalen ges då av

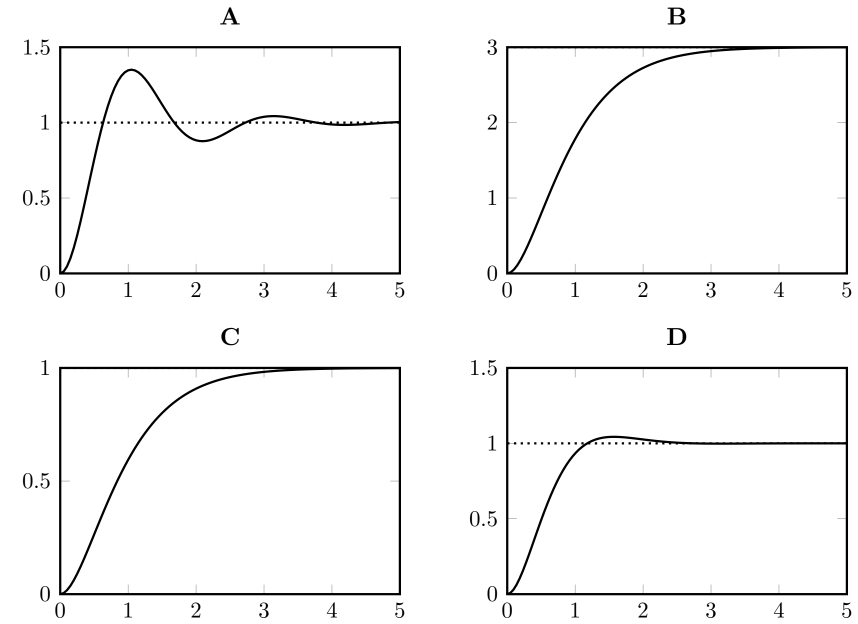
$$L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} = \frac{75\pi/180}{10} \approx 0.125s$$

Dödtiden är alltså kortare än en människas reaktionstid, en människa skulle med andra ord införa en för stor tidsfördröjning och systemet skulle bli ostabilt. Svaret är allstå nej (förutsatt att människan reagerar som en ren proportionalregulator).

c. Känslighetsfunktionen är ett mått på hur mycket last/mätstörningar förstärks relativt det öppna systemet. Inversen av känslighetsfunktionen ges av avståndet från Nyquist-kurvan till -1. För att en störning ska dämpas måste alltså punkten på Nyquist-kurvan för motsvarande frekvens vara längre bort än 1 från punkten -1 ($1/|S| > 1 \Leftrightarrow |S| < 1$). Men då kretsförstärkningen aldrig har en fas på under -90 kommer hela Nyquist-kurvan ligga i höger halvplan och all punkter i högerhalvplan är längre bort än avstånd 1 från punkten -1. $\Rightarrow$ alla störningsfrekvenser dämpas av återkopplingen. Se Figur 7 för kretsförstärkningens Nyquistkurva tillsammans med den regionen runt -1 som kurvan ska va utanför.



Figur 7: Nyquistdiagram för uppgift 6



Figur 8: Stegsvar för uppgift 7

7. Systemet nedan återkopplas med tillståndsåterkopplingen $u = -Lu + l_r r$ där r är referensvärdet man vill y ska följa.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Para ihop de följande tillståndsåterkopplingarna med stegsvaren för det slutna systemen i Figur 8 och motivera dina svar. (4 p)

1: $L = [0.5, -1]^T,\ l_r = 1$

2: $L = [1.5, 0]^T,\ l_r = 1$

3: $L = [1.5, 1]^T,\ l_r = 2/3$

4: $L = [1.5, 0]^T,\ l_r = 1/3$

5: $L = [0.5, 1.5]^T,\ l_r = 5/6$

Solution

Det slutna systemet har överföringsfunktionen

$$G(s) = C(sI - A + BL)^{-1} B l_r$$

där $L = [l_1\ l_2]$. Det karakteristiska polynomet ges av

$$\det(sI - A + BL) = \det \begin{vmatrix} s + 2l_1 + 1 & 2l_2 + 2 \\ -2 & s \end{vmatrix} = s^2 + (1 + 2l_1)s + 4(l_2 + 1)$$

Polerna är då

$$p = -\frac{1 + 2l_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 + 2l_1)^2}{4} - 4(l_2 + 1)}$$

Från detta ses att återkoppling 1 har en pol i 0 och stegsvaret ska då gå mot oändligheten. Ingen av stegsvaren har det beteendet så återkoppling 1 kan uteslutas.

Återkoppling 2 och 4 har båda en dubbelpol i -2 vilket matchar stegsvar B och C då dom saknar överslängar. Från det slutna systemets överföringsfunktions ses att l_r är en ren skalning och återkoppling 2 ska då alltså ge en 3 gånger så stor utsignal som återkoppling 4. Det ger att $2 = B$ och $4 = C$.

Återkoppling 3 har poler i $-2 \pm 2i$ och återkoppling 5 har poler i $-1 \pm 3i$. Polerna för återkoppling 5 ligger alltså både längre från origo och har en större vinkel mot reella axeln jämfört med återkoppling 3. 5 ska alltså både va snabbare och sämre dämpat än 3. Det ger $3 = D$ och $5 = A$.