LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 9 januari 2018 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Vi har följande system

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

a. Är systemet styrbart? (0.5 p)

b. Är systemet observerbart? (0.5 p)

c. Beräkna systemets överföringsfunktion. Av vilken ordning är systemet? (1 p)

Solution

a. Styrbarhetsmatrisen blir

$$W_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Systemet är styrbart då determinanten är skild från 0 vilket innebär att vi har 2 linjärt oberoende kolonner.

b. Observerbarhetsmatrisen blir

$$W_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Systemet är observerbart då determinanten är skild från 0 vilket innebär att vi har 2 linjärt oberoende kolonner.

c. Formel för överföringsfunktionen ger oss att

$$G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B = \frac{3}{s^2 + 2s + 3}$$

Systemet har ordning 2.

2. En process kan beskrivas med följande differentialekvation

$$\ddot{y} + \dot{y} - 12y = \dot{u} + 2u$$

a. Vad blir processens överföringsfunktion? Är processen asymptotiskt stabil? (1 p)

b. Processen återkopplas och regleras med en P-regulator. För vilka värden på K blir systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

c. Beräkna det stationära felet som uppstår om man skickar in ett enhetssteg som referensvärde till det återkopplade systemet. (1 p)

Solution

a. Laplacetransformering ger

$$s^2Y + sY - 12Y = sU + 2U$$

Utbrytning av Y och U ger överföringsfunktionen

$$\frac{s+2}{s^2+s-12}$$

Processen är inte stabil (eller asymptotiskt för den delen) då den har en pol i högra halvplanet, $s = 3$. För asymptotisk stabilitet kan man också kolla på att om vi har $s^2 + a_1 s + a_2$ så måste a_1 och a_2 vara strängt positiva.

b. Inför regulatorn $G_R(s) = K$. Det slutna systemet ges nu av

$$G(s) = \frac{G_R(s)G_p(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = \frac{\frac{K(s+2)}{s^2+s-12}}{1 + \frac{K(s+2)}{s^2+s-12}} = \frac{Ks + 2K}{s^2 + (K+1)s + 2K - 12}$$

Systemet är asymptotiskt stabilt om $a_1, a_2 > 0$. Från a_2 ser vi att $K > 6$.

c. Felet i ett system kan räknas ut som en överföringsfunktion från referensvärdet

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_R(s)G_P(s)}R(s) = \frac{1}{1 + \frac{K(s+2)}{s^2+s-12}}R(s) = \frac{s^2+s-12}{s^2 + (K+1)s + 2K - 12}R(s)$$

Om vi antar att $K > 6$ så ligger samtliga poler för överföringsfunktionen i vänstra halvplan och gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} e(t)$ existerar. Existens av gränsvärde gör så att vi kan använda slutvärdesteoremet.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2+s-12}{s^2 + (K+1)s + 2K - 12}R(s)$$

För ett enhetssteg är $R(s) = \frac{1}{s}$ och vi får att

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2+s-12}{s^2 + (K+1)s + 2K - 12}\frac{1}{s} = -\frac{12}{2K-12}$$

3. Ett system beskrivs av följande differentialekvation

$$2\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{x} + x = \sqrt{(1+u)}$$

a. Vilken ordning har systemet? Skriv systemet på tillståndsform med tillstånden $x_1 = x$ och $x_2 = \dot{x}$. (1 p)

b. Bestäm systemets stationära punkter. (1 p)

c. Linjärisera systemet kring en punkt där $u = 3$. (2 p)

Solution

a. It is a second order system. Choosing $x_1 = x$ and $x_2 = \dot{x}$ as the two states, we get

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x_2} &= \ddot{x} = \frac{\sqrt{(1+u)} - x_1 - \dfrac{x_2}{x_1}}{2}\end{aligned}$$

b. Assigning both the equations to 0, we get

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= \sqrt{(1+u)} - x_1 - \frac{x_2}{x_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+u)} &= x_1 + \frac{0}{x_1} \\ \sqrt{(1+u)} &= x_1\end{aligned}$$

The stationary points $(x_1, x_2, u) = (\sqrt{1+u}, 0, u)$

c. The stationary points are (2,0,3) and (-2,0,3). Choosing (2,0,3),

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x_1} &= \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x_2} &= \frac{1}{2}\left((-1 + \frac{x_2}{x_1^2})\Delta x_1 - \frac{1}{x_1}\Delta x_2 + \frac{1}{2\sqrt{1+u}}\Delta u\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x_2} &= \frac{1}{2}\left((-1 + \frac{0}{4})\Delta x_1 - \frac{1}{2}\Delta x_2 + \frac{1}{2\sqrt{1+3}}\Delta u\right) \\ \Delta\dot{x_2} &= \frac{1}{2}\left(-\Delta x_1 - \frac{1}{2}\Delta x_2 + \frac{1}{4}\Delta u\right)\end{aligned}$$

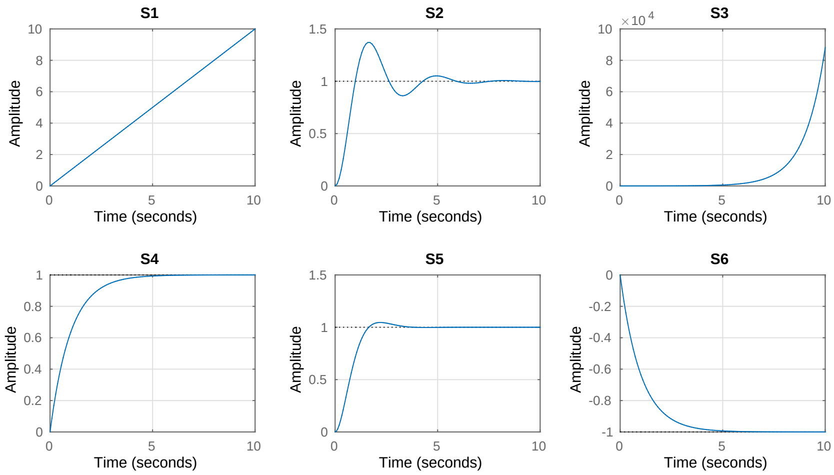
The linearised system is

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x_1} &= \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x_2} &= -\frac{1}{2}\Delta x_1 - \frac{1}{4}\Delta x_2 + \frac{1}{8}\Delta u\end{aligned}$$

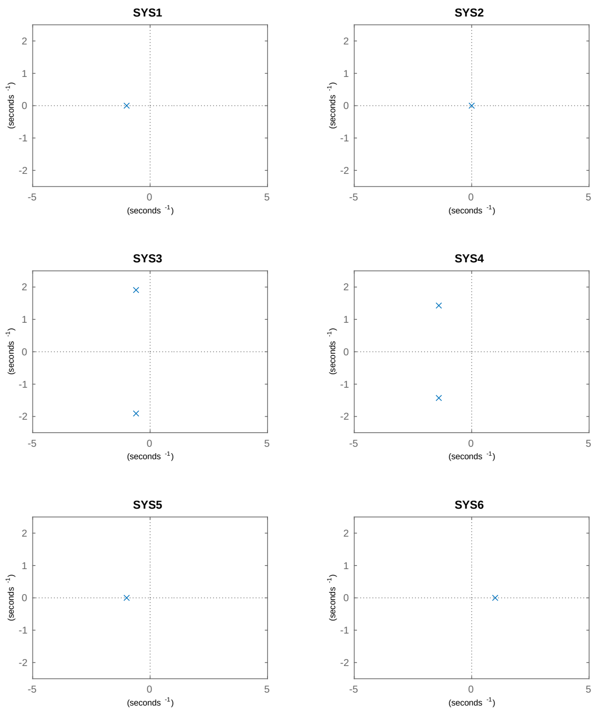
4. Figur 1 visar stegsvaren för sex olika system och figur 2 visar polerna för mostsvarande system. Para ihop stegsvaren med motsvarande poldiagram. Motivering krävs! (3 p)

Solution

1. SYS2 = S1 :- Integrator
2. SYS3 = S2 :- Second order system with low damping



Figur 1: Stegsvar i uppgift 4.



Figur 2: Polplaceringar i uppgift 4.

3. SYS4 = S5 :- Second order system with high damping
4. SYS6 = S3 :- Unstable system
5. SYS1 and SYS5 are matched to S4 and S6.
   S4 has positive gain and S6 has negative gain
   The gains are not seen in the pole plot.

5. Nyquistdiagrammet för en okänd process visas i Figur 3.

a. Vad menas med amplitudmarginal och hur kan man räkna ut den från ett Nyquistdiagram? Vad blir amplitudmarginalen i vårt fall? (1 p)

b. Vad menas med fasmarginal och hur kan man räkna ut den från ett Nyquistdiagram? Vad blir fasmarginalen i vårt fall? (1 p)

c. Antag att vi vet att skärfrekvensen är ungefär 2 rad/s. Vad menas med dödtidsmarginal och vad blir den i vårt fall? (1 p)

Solution

Definitioner av amplitud/fas och dödtidsmarginaler står på s. 54-55 i föreläsningsanteckningarna.

a. Amplitudmarginalen talar om hur mycket förstärkningen i reglerkretsen kan ändras innan systemet blir instabilt. Amplitudmarginalen kan räknas ut där nyquistkurvan skär den negativa realaxeln. Avståndet till -1 bestämmer sedan inversen av amplitudmarginalen. I detta fall blir

$$\frac{1}{|A_m|} \approx 0.25 \quad \Longrightarrow \quad A_m \approx 4$$

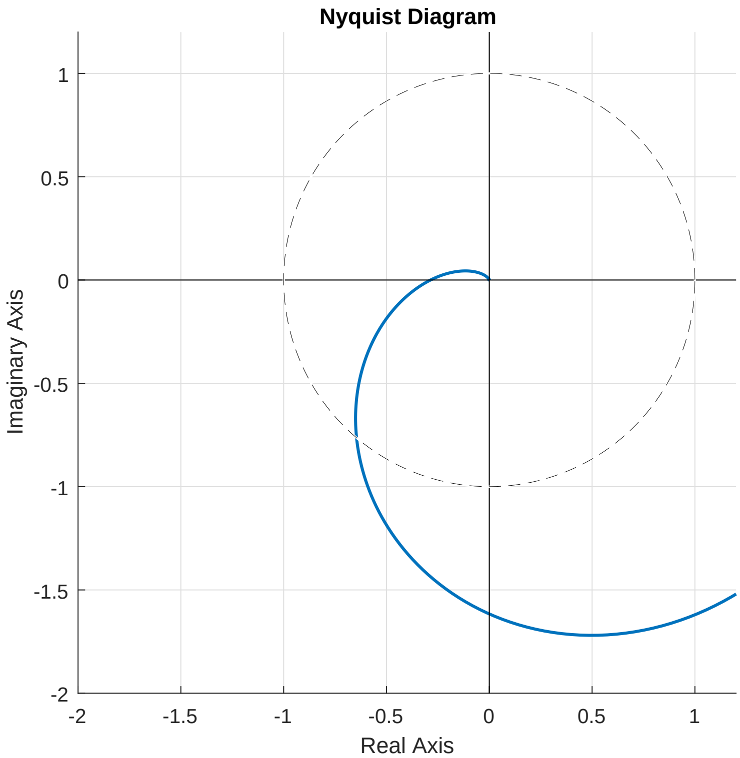
b. Fasmarginalen talar om hur mycket fasvridningen i reglerkretsen kan ändras innan systemet blir instabilt. Fasmarginalen kan räknas ut som vinkeln mellan skärfrekvensen och den negativa realaxeln. Skärfrekvensen är frekvensen där nyquistkurvan skär enhetscirceln. I detta fall blir

$$\varphi_m \approx 50$$

c. Dödtidsmarginalen talar om hur mycket dödtid man kan lägga till i reglerkretsen innan systemet blir instabilt. Dödtidsmarginalen räknas ut via

$$L_m = \frac{\varphi_m}{w_c} \approx 0.44s$$

Här är det viktigt att både fasmarginalen och skärfrekvensen har rätt enheter.



Figur 3: Nyquistdiagram för den okända processen i uppgift 5.

6. Mulle Meck har hittat en ny grunka som han skulle vilja använda till sin bil. Dessvärre känner han inte till grunkans dynamik vilket gör att det blir svårt att ställa upp någon modell för hand.

Istället får han idén att experimentellt räkna ut grunkans bodediagram genom att skicka in en sinusvåg med enhetsamplitud och långsamt variera frekvensen. Amplituden och fasförskjutningen fås sedan genom att mäta på de sinusvågor som kommer ut från grunkan.

Det experimentella bodediagrammet visas i Figur 4. Efter noggranna mätningar kommer Mulle Meck även fram till att grunkans lågfrekvensasymptot är $G_g(0) = \frac{5}{6}$.

a. Här tar Mulles reglertekniska kunskaper slut. Hjälp honom att bestämma grunkans överföringsfunktion via bodediagrammet. (2 p)

b. Ställ upp processen på styrbar kanonisk form. (0.5 p)

c. Grunkans egenskaper är tyvärr inte önskvärda tycker Mulle Meck och han skulle vilja ändra på dess dynamik. Hjälp honom att göra detta genom att införa en tillståndsåterkoppling sådan att det slutna systemets poler båda hamnar i $s = -4$. Bestäm även l_r sådan att den statiska förstärkningen blir 1.

Antag att samtliga tillstånd är mätbara. (2.5 p)

Solution

a. Genom att kolla i bodediagrammet ser vi att vi har två brytfrekvenser kring $w = 0.2$ och $w = 30$. Vi har därför två poler i $s = -0.2$ och $s = -30$. Överföringsfunktionen kan då skrivas som

$$G_g(s) = \frac{A}{(s+0.2)(s+30)} = \frac{A}{s^2 + 30.2s + 6}$$

Med hjälp av lågfrekvensasymptoten kan A räknas ut

$$\begin{aligned} G_g(0) &= \frac{A}{6} = \frac{5}{6} \\ &\Longrightarrow \\ G_g(s) &= \frac{5}{s^2 + 30.2s + 6} \end{aligned}$$

b. Uppställning på styrbar kanonisk form ger

$$A = \begin{bmatrix} -30.2 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

c. Med tillståndsåterkoppling blir det slutna systemets överföringsfunktion

$$G(s) = C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r$$

Överföringsfunktionens nämnare, eller systemets karaktäristiska polynom ges av

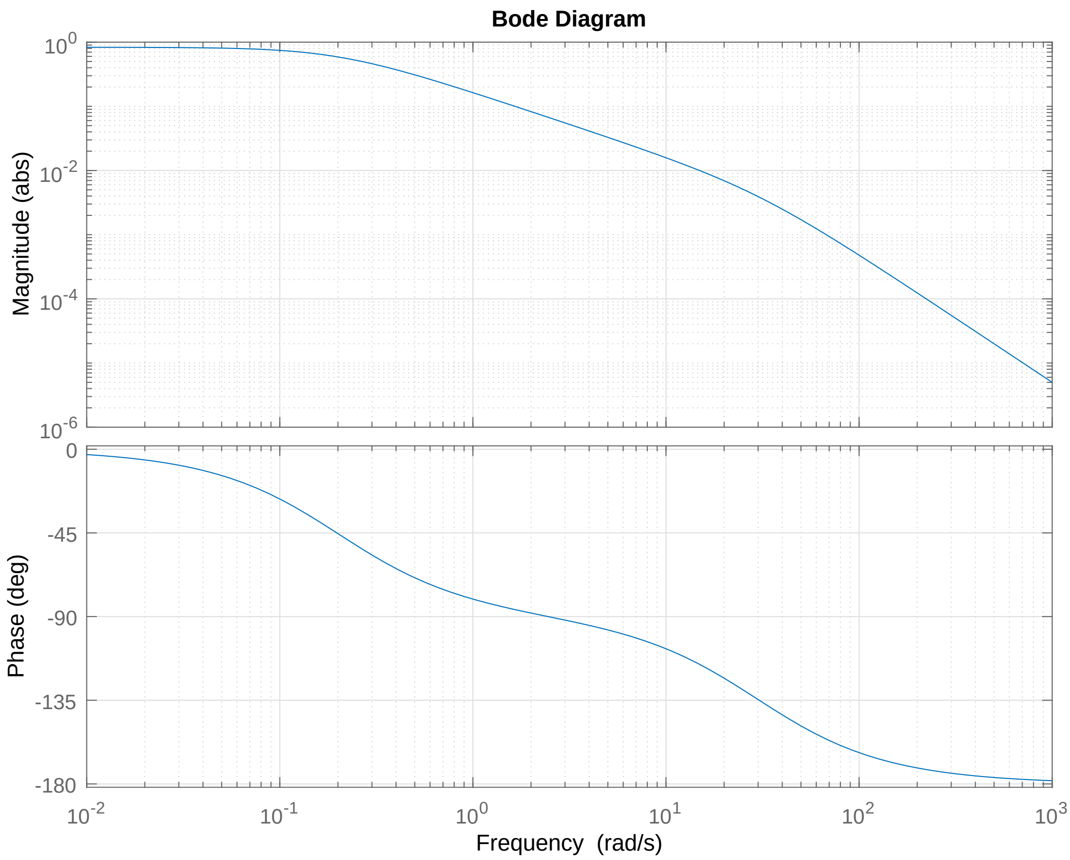
$$\det\left(sI-(A-BL)\right)$$

Om vi antar att $L=[l_1,l_2]$ fås att determinanten kan skrivas som

$$\begin{aligned}&\det\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-30.2 & -6\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1 & l_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\ &=\det\left(\begin{bmatrix}s+30.2+l_1 & l_2+6\\ -1 & s\end{bmatrix}\right)\\ &=s^2+(30.2+l_1)s+l_2+6\end{aligned}$$

Identifiering med $(s+4)^2=s^2+8s+16$ ger att $L=[-22.2,10]$.
Den statiska förstärkningen räknas ut då s = 0 och ger att

$$\begin{aligned}&G(0)=\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 16\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}l_r\\ &=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -16\\ 1 & 8\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}l_r\\ &=\frac{5}{16}l_r=1\\ &\Rightarrow l_r=\frac{16}{5}\end{aligned}$$



Figur 4: Bodediagram för den okända grunkan i uppgift 6.

7. Den ökande konsumtionstrenden i vårt samhälle har bidragit till att jultomtens paketmaskin nu är otillräcklig för att möta efterfrågan före julafton. För att behålla sitt julklappsmonopol och inte bli utkonkurrerad av mindre seriösa aktörer så måste tomten genast åtgärda problemet.

Att investera i ytterligare en paketmaskin är en dyr affär då börsen står högt i magiska föremål. Det är inte heller säkert att den nya maskinen hinner levereras i tid. Istället vill tomten förbättra sin nuvarande paketmaskin så att den klarar att producera rätt antal varor före jul.

För att rädda julen har tomten anställt dig som reglerteknik-specialist i en konsultgrupp. Gruppen upptäcker ganska snabbt att maskinen har en vital del som bestämmer hur snabbt den arbetar. Överföringsfunktionen för den vitala delen bestäms till

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Denna vitala process skall nu regleras för att försöka snabba upp hela maskinen.

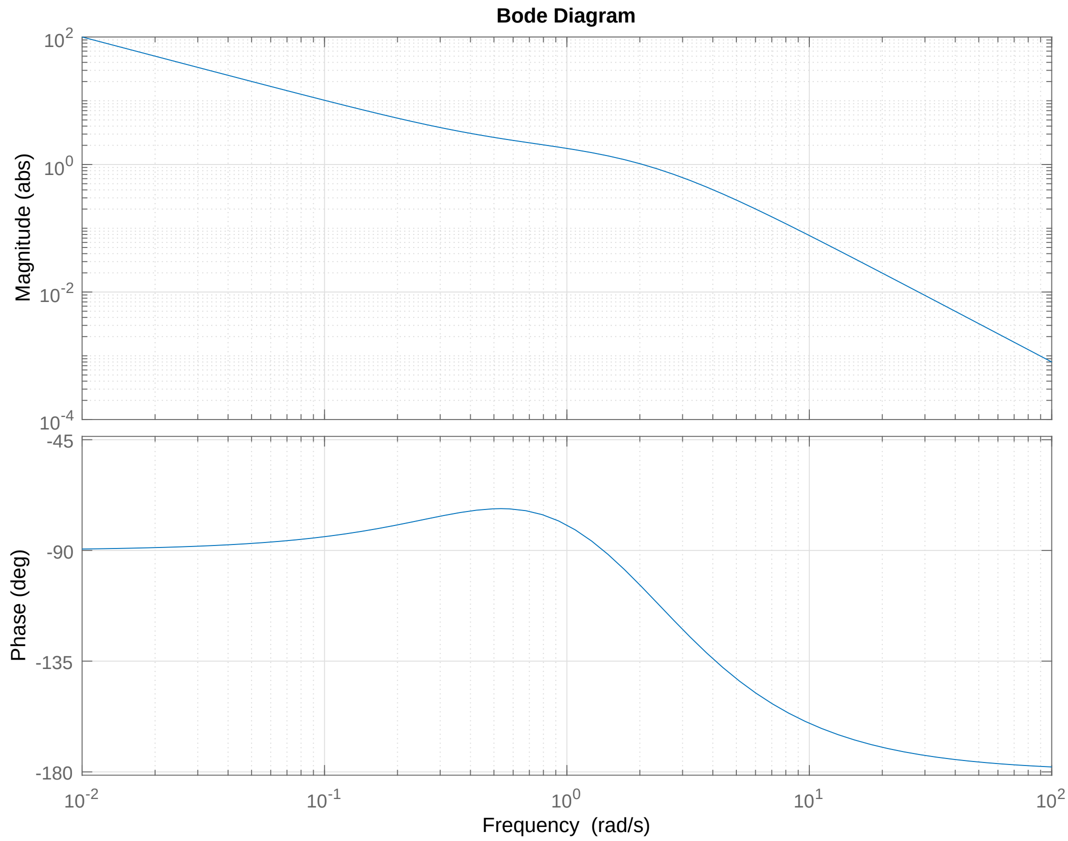
a. Som ett första förslag bestämmer ni er i gruppen för att göra en polplacering med en PID regulator. Polerna skall placeras på formen $(s+a)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)$ så att samtliga poler får avståndet 4 till origo och de två komplexkonjugerade polerna får en relativ dämpning på 0.8.

Som specialisten i teamet är det nu ditt jobb att bestämma parametrarna $K,\ T_i,\ T_d$ så att det slutna systemet får den önskade polplaceringen. (2 p)

b. Efter en tids förhandlingar övertygar du dina kollegor om att det kommer bli svårt att uppfylla alla tomtens specifikationer med en PID regulator.

Istället föreslår du att det är bättre att införa en enkel, långsam PI regulator för att ta hand om insvängningen och det stationära felet och sedan införa en lämplig kompenseringslänk för att snabba upp systemet.

Låt $K = 8,\ T_i = 2$ i PI regulatorn och inför en lämplig länk sådan att systemet blir 5 ggr snabbare och fasmarginalen blir 50°. Som hjälp har du tillgång till kretsöverföringsfunktionens bodediagram i Figur 5. (3 p)



Figur 5: Bodediagram för kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$ i uppgift 7 b.

Solution

a. Överföringsfunktionen för en PID regulator är

$$K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = \frac{K T_d s^2 + K s + \frac{K}{T_i}}{s}$$

Kretsöverföringsfunktionen blir

$$G_r \cdot G_p = \frac{KT_d s^2 + Ks + \frac{K}{T_i}}{s^3 + 4s^2 + 4s}$$

Det återkopplade systemets överföringsfunktion blir

$$G(s) = \frac{G_r G_p}{1 + G_r G_p} = \frac{KT_d s^2 + Ks + \frac{K}{T_i}}{s^3 + (4 + KT_d)s^2 + (4 + K)s + \frac{K}{T_i}}$$

Den önskade polplaceringen ger

$$(s + 4)(s^2 + 2 * 0.8 * 4s + 16) = s^3 + 10.4s^2 + 41.6s + 64$$

Identifiering av polynomkoefficienterna ger att

$$\begin{cases} 4 + T_d K = 10.4 \\ 4 + K = 41.6 \\ \dfrac{K}{T_i} = 64 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} K = 37.6 \\ T_i = 0.59 \\ T_d = 0.17 \end{cases}$$

b. Kretsöverföringsfunktionen med PI regulatorn blir

$$G_0 = 8\left(1 + \frac{1}{2s}\right)\frac{1}{s^2 + 4s + 4} = \frac{8s + 4}{s^3 + 4s^2 + 4s}$$

Vi vill införa en fasavancerande länk sådan att w_c blir 5 ggr större och $\varphi_m = 50°$. Den fasavancerande länken har följande utseende

$$G_K = K_K N \frac{s + b}{s + bN}$$

Från bodediagrammet kan vi avläsa att $w_c \approx 2$. För att göra systemet 5ggr snabbare vill vi flytta skärfrekvensen till $w_c^* = 10$. Vid w_c^* kan vi i bodediagrammet avläsa att

$$arg(G_0(iw_c^*)) \approx -160°$$

För att fasmarginalen skall bli $\varphi_m = 50°$ måste den ökas med $\Delta\varphi_m = 30°$. För att uppnå detta fås via formelbladet att $N = 3$. Vi vill även se till att faskurvans topp för kompenseringslänken hamnar vid w_c^*. Detta fås genom att placera b vid

$$w_c^* = b\sqrt{N} \qquad \Longrightarrow \qquad b = 10/\sqrt{3}$$

Nu återstår det att bestämma K_K sådan att den nya kretsöverföringsfunktionen får statisk förstärkning 1 i w_c^*

$$\begin{aligned} &|G_K(iw_c^*)G_0(iw_c^*)| \\ &\approx K_K\sqrt{N} \cdot 0.07 = 1 \\ &\Longrightarrow K_K \approx 8.2 \end{aligned}$$

Här kan $|G_0(iw_c^*)|$ avläsas ur bodediagrammet. Vår slutliga faskompenseringslänk blir således

$$G_K(s) \approx 25 \frac{s+6}{s+17}$$