LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 23 oktober 2017 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

1. Ett system är givet av följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$$

a. Är systemet asymptotiskt stabilt? (0.5 p)

b. Skriv systemet på styrbar kanonisk form. (0.5 p)

c. Skriv en differentialekvation för systemet. (1 p)

d. Inför tillstånden $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y} - u$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

Solution

a. Ja, alla koefficienter i det karakteristiska polynomet är positiva $\Rightarrow$ alla poler ligger strikt i vänster halvplan ($p = -2 \pm i$)

b. Formelsamlingen ger direkt

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

c. Invers Laplacetransform av $Y(s) = G(s)U(s)$ ger

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) = (s+2)U(s)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 5Y(s) = sU(s) + 2U(s)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = \dot{u} + 2u$$

d. Inför tillstånden och derivera

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} - u \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x_1} &= \dot{y} \\ \dot{x_2} &= \ddot{y} - \dot{u} \end{aligned}$$

Använd differentialekvationen från föregående uppgift för att uttrycka derivatorna med enbart tillstånden och styrsignalen, x_1, x_2 och u

$$\dot{x_1} = \dot{y} = x_2 + u$$
$$\dot{x_2} = \ddot{y} - \dot{u} = -4\dot{y} - 5y + 2u = -4x_2 - 5x_1 - 2u$$

Detta kan nu sammanfattas på standard tillståndsform

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

2. En inverterad pendel på en vagn enligt figur 1 beskrivs av differentialekvationen

$$\ell\ddot{\varphi} - g\sin\varphi = -u\cos\varphi, \tag{1}$$

där φ är pendelns vinkel mätt enligt figuren, $\ell > 0$ är pendelns längd, $g > 0$ är tyngdaccelerationen och $u = \ddot{z}$ är vagnens acceleration som antas vara styrsignalen (insignalen) som vi kan kontrollera.

a. Inför pendelns vinkel och vinkelhastighet som tillstånd: $x_1 = \varphi$ och $x_2 = \dot{\varphi}$ och skriv det olinjära systemet (1) på tillståndsform. Som mätsignal (utsignal) väljs pendelvinkeln φ. (1 p)

b. Verifiera att $(x_1, x_2, u) = (0, 0, 0)$ är en stationär punkt och linjärisera systemet kring denna. (2 p)

Solution

a. Med $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$ och $y = \varphi$ erhålls

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 && = f_1(x_1, x_2, u) \\
\dot{x}_2 &= \frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{1}{\ell}u\cos x_1 && = f_2(x_1, x_2, u) \\
y &= x_1 && = g(x_1, x_2, u).
\end{aligned}$$

b. Insättning av $(x_1, x_2, u) = (0, 0, 0)$ i resultatet från föregående deluppgift ger

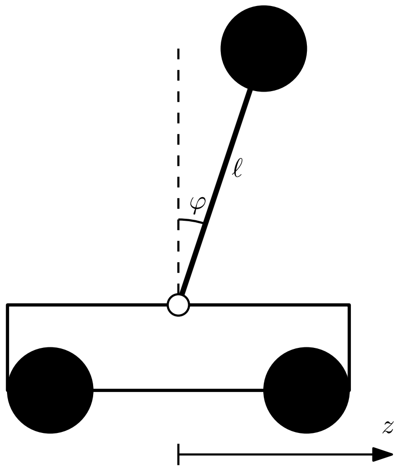
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 0 \\
\dot{x}_2 &= \frac{g}{\ell}\sin 0 - \frac{1}{\ell}0\cdot\cos 0 = 0,
\end{aligned}$$

d.v.s. $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ och den givna punkten är därmed en stationär punkt. Derivatorna blir

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0, \\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{g}{\ell}\cos x_1 + \frac{1}{\ell}u\sin x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{1}{\ell}\cos x_1, \\
&\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.
\end{aligned}$$

Vi inför avvikelserna från linjäriseringspunkten (som i det här fallet råkar sammanfalla med variabelvärdena) som nya variabler:

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= x_1 - x_1^0 = x_1 - 0 = x_1, \\
\Delta x_2 &= x_2 - x_2^0 = x_2 - 0 = x_2, \\
\Delta u &= u - u^0 = u - 0 = u, \\
\Delta y &= y - y^0 = y - x_1^0 = y - 0 = y.
\end{aligned}$$



Figur 1 Inverterad pendel.

Det linjära systemet blir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta x_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta u \\
\frac{\mathrm{d}\Delta x_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta u \\
\Delta y &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta x_2 + \frac{\partial g}{\partial u}(x_1^0, x_2^0, u^0)\Delta u
\end{aligned}
$$

vilket efter insättning av $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0, 0, 0)$ och uttryckt på matrisform blir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \Delta u = A\Delta x + B\Delta u \\
\Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x = C\Delta x.
\end{aligned}
$$

3. Efter många klagomål över kalla studentbostäder under vinterhalvåret har de ansvariga bestämt sig för att anlita dig som konsult för att undersöka saken. Inomhustemperaturen kan modelleras med differentialekvationen

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \beta u(t),$$

där $y(t)$ är avvikelsen i temperatur (angiven i °C) från referenstemperaturen 20 °C (d.v.s. $y(t) = T(t) - 20$ °C, där $T(t)$ är inomhustemperaturen). Insignalen $u(t)$ består av två delar: $u(t) = u_1(t) + \gamma u_2(t)$, där $u_1(t)$ är värmeelementets effekt och $u_2(t)$ är utomhustemperaturen angiven i avvikelse från referensvärdet 15 °C.

a. Bestäm överföringsfunktionen $G_P(s)$ från insignalen $u(t)$ till temperaturen $y(t)$. (0.5 p)

b. Du får reda på att temperaturregleringen sker via en enkel återkoppling enligt figur 2, där $\ell(t) = \gamma u_2(t)$ är påverkan från utomhustemperaturen och signalen som ställs ut av regulatorn är elementeffekten $u_1(t)$. Du upptäcker, till din förskräckelse, att regulatorn $G_R(s)$ som används är en enkel P-regulator: $G_R(s) = K$. Bestäm de två överföringsfunktionerna $G_{ry}(s)$ och $G_{\ell y}(s)$ från referenssignalen $r(t)$ till utsignalen $y(t)$ respektive från laststörningen $\ell(t)$ till utsignalen $y(t)$. (1 p)

c. Då utomhustemperaturen sänks med 5 °C jämfört med utgångsvärdet 15 °C uppstår en laststörning som kan beskrivas som

$$\ell(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -5\gamma, & t \geq 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Beräkna den stationära ändringen av inomhustemperaturen, d.v.s. $y(t)$ då $t \to \infty$ (vi antar att $r(t) = 0$), som resulterar från denna laststörning. Anta att $\alpha = 8$, $\beta = 4$, $K = 2$ och $\gamma = 2$. (1 p)

d. Du föreslår att P-regulatorn ska ersättas med en PI-regulator

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

med $K > 0$ och $T_i > 0$. Övriga parametervärden är samma som i föregående deluppgift. Bestäm överföringsfunktionen $G_{\ell y}(s)$ från $\ell(t)$ till $y(t)$ och beräkna det stationära värdet på utsignalen $y(t)$ då $r(t) = 0$ och laststörningen ges av (2). (1.5 p)

Solution

a. Laplacetransformering av differentialekvationen ger

$$sY(s) = -\alpha Y(s) + \beta U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{\beta}{s+\alpha}U(s).$$

Överföringsfunktionen $G_P(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)}$ är därmed

$$G_P(s) = \frac{\beta}{s+\alpha}.$$

b. Från blockdiagrammet ser vi att utsignalen ges av

$$Y(s) = G_P(s)(L(s) + G_R(s)(R(s) - Y(s))),$$

d.v.s.

$$Y(s) = G_P(s)L(s) + G_P(s)G_R(s)R(s) - G_P(s)G_R(s)Y(s).$$

Utbrytning av $Y(s)$ ger

$$Y(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}L(s) + \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}R(s).$$

Alltså har vi

$$G_{\ell y}(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} \quad \text{och} \quad G_{ry}(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}.$$

Insättning av $G_P(s)$ och $G_R(s)$ ger

$$G_{\ell y}(s) = \frac{\frac{\beta}{s+\alpha}}{1 + \frac{K\beta}{s+\alpha}} = \frac{\beta}{s+\alpha+K\beta} \quad \text{och} \quad G_{ry}(s) = \frac{\frac{K\beta}{s+\alpha}}{1 + \frac{K\beta}{s+\alpha}} = \frac{K\beta}{s+\alpha+K\beta}$$

c. Laststörningen $\ell(t)$ är en skalad stegfunktion. Laplacetransformen av en enhetsstegfunktion är $1/s$ och genom att använda transformens linjäritetsegenskap erhålls

$$L(s) = -\frac{5\gamma}{s}.$$

Laplacetransformen av signalen $y(t)$ blir således

$$Y(s) = G_{\ell y} L(s) = \frac{\beta}{s + \alpha + K\beta} \left(\frac{-5\gamma}{s} \right). \tag{3}$$

Slutvärdessatsen ger

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{-5\beta\gamma}{s + \alpha + K\beta} = \lim_{s \to 0} \frac{-40}{s + 16} = -2.5.$$

Slutvärdessatsen får bara användas ifall gränsvärdet existerar. Detta existerar ifall systemet $sY(s)$ är asymptotiskt stabilt, vilket här är fallet eftersom systemets enda pol $s = -16$ ligger i vänster halvplan i det komplexa talplanet. Därmed är resultatet giltigt. Inomhustemperaturen sjunker alltså stationärt med 2.5 °C då utomhustemperaturen sänks med 5 °C.

d. Laplacetransformering av PI-regulatorn ger överföringsfunktionen $G_R(s) = U(s)/E(s)$ enligt

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = K \left(\frac{sT_i + 1}{sT_i} \right).$$

Insättning av denna i $G_{\ell y}(s)$ ger

$$\begin{aligned} G_{\ell y}(s) &= \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s) G_R(s)} = \frac{\frac{\beta}{s+\alpha}}{1 + K \left(\frac{\beta}{s+\alpha} \right) \left(\frac{sT_i + 1}{sT_i} \right)} \\ &= \frac{sT_i \beta}{sT_i(s + \alpha) + K\beta(sT_i + 1)} = \frac{s\beta}{s^2 + (\alpha + K\beta)s + K\beta/T_i}. \end{aligned}$$

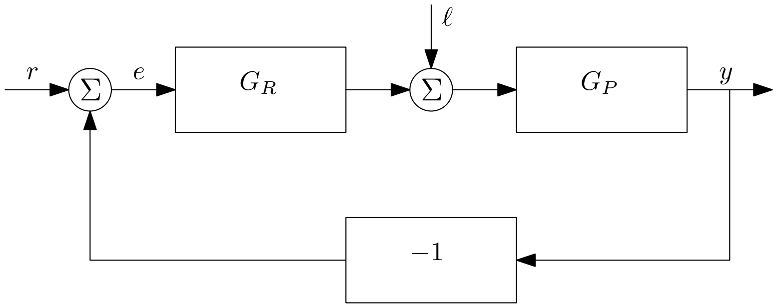
Laplacetransformen av utsignalen blir

$$Y(s) = G_{\ell y} L(s) = \frac{s\beta}{s^2 + (\alpha + K\beta)s + K\beta/T_i} \left(\frac{-5\gamma}{s} \right)$$

och det stationära värdet på $y(t)$ erhålls via slutvärdessatsen som

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{-5s\gamma\beta}{s^2 + (\alpha + K\beta)s + K\beta/T_i} = 0.$$

Slutvärdessatsen får bara användas ifall gränsvärdet existerar. Så är fallet om systemet $sY(s)$ är asymptotiskt stabilt. Att koefficienterna $(\alpha + K\beta)$ och $K\beta/T_i$ i polpolynomet $s^2 + (\alpha + K\beta)s + K\beta/T_i$ är positiva implicerar att polerna är i vänster halvplan och därmed att systemet är asymptotiskt stabilt. Således får slutvärdessatsen användas och resultatet är giltigt. Med PI-regulatorn är det alltså möjligt att stationärt eliminera effekten av den givna laststörningen så att temperaturen återgår till $y(t) = 0$.



Figur 2 Enkel återkoppling.

4. En elektrisk motor som styr en robotled kan beskrivas enligt

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x,$$

där x_1 är motorns vinkel, som också är utsignal y, x_2 är motorns vinkelhastighet och styrsignalen u är strömmen till motorn.

a. För att ledvinkeln ska ändras som vi vill behövs det en bra regulator. Vi väljer att låta insignalen bero linjärt på tillståndsvariablerna och referenssignalen, så att regulatorn blir på formen

$$u = \ell_r r - Lx, \tag{4}$$

där ℓ_r och $L = [\,\ell_1 \quad \ell_2\,]$ är designparametrar som vi behöver välja. Vi vill att det karaktäristiska polynomet för det återkopplade systemet, d.v.s. systemet som styrs av vår regulator och har r som insignal, ska vara

$$p_1(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2, \tag{5}$$

för några givna värden på ω och ζ. Bestäm parametrarna ℓ_1 och ℓ_2 (uttryckta i de kända värdena ω och ζ) så att det återkopplade systemet får det karaktäristiska polynomet (5). (2 p)

b. Bestäm parametervärdet ℓ_r så att den statiska förstärkningen mellan r och y blir 1. (1 p)

c. För att kunna använda vår regulator måste vi känna till värdena på tillståndsvariablerna x_1 och x_2, men de enda signaler som vi känner till och kan mäta är u och y. Med hjälp av ett Kalmanfilter

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = C\hat{x},$$

där $K = [\,k_1 \quad k_2\,]^T$ är designparametrar som vi väljer, erhålls skattningar $\hat{x}_1$ och $\hat{x}_2$ av tillståndsvariablerna x_1 och x_2. Vi antar att det givna karakteristiska polynomet (5) har värdena $\zeta = 0.25$ och $\omega = 2$ på sina parametrar. För att tillståndsskattningen ska vara snabbare än dynamiken hos det återkopplade systemet, så att de skattade värdena kan användas, vill vi att det karakteristiska polynomet för skattningsfelet har sina poler dubbelt så långt från origo som systemet. Därför väljs $\omega = 4$ och

$$p_2(s) = s^2 + 2s + 16. \tag{6}$$

Bestäm värdena på k_1 och k_2 så att tillståndsskattningsfelet $\widetilde{x} = x - \hat{x}$ avtar enligt det karakteristiska polynomet (6). (2 p)

d. Vad kan det finnas för problem med att, för en verklig process, välja det karakteristiska polynomet (6) för skattningsfelet så att felet avtar väldigt snabbt, d.v.s. vilken avvägning måste göras i valet av snabbheten för Kalmanfiltret? (1 p)

Solution

a. Genom att sätta in uttrycket för regulatorn (4) i $\dot{x} = Ax + Bu$ erhålls uttrycket för det slutna systemet:

$$\dot{x} = (A - BL)x + B\ell_r r. \tag{7}$$

Dynamiken för systemet ges av det karakteristiska polynomet för den nya "A-matrisen", som för det slutna systemet alltså är $(A - BL)$. Denna ges av

$$(A - BL) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\ell_1 & -4 - 2\ell_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Det karakteristiska polynomet blir då

$$\det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2\ell_1 & s + 4 + 2\ell_2 \end{vmatrix} = s^2 + (4 + 2\ell_2)s + 2\ell_1.$$

Två polynom är samma om och endast om deras koefficienter är samma. För att det karakteristiska polynomet ska bli det önskade, (5), måste det alltså gälla att

$$\begin{cases} 2\ell_1 = \omega^2 \\ 4 + 2\ell_2 = 2\zeta\omega \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ell_1 = \omega^2/2 \\ \ell_2 = \zeta\omega - 2 \end{cases}.$$

b. Den statiska förstärkningen är förstärkningen då tillstånden inte längre ändras, d.v.s. då $\dot{x} = 0$. Vi får då från (7) att

$$0 = (A - BL)x + B\ell_r r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\ell_1 & -4 - 2\ell_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ell_r r.$$

Den första ekvationen ger $x_2 = 0$ och insättning av detta i den andra ekvationen ger

$$-2\ell_1 x_1 + 2\ell_r r = 0,$$

från vilken vi kan lösa ut x_1 som $x_1 = (\ell_r/\ell_1)r$. Eftersom utsignalen $y = x_1$ får vi då

$$y = \frac{\ell_r}{\ell_1} r,$$

och för att få $y = r$ stationärt (d.v.s. statisk förstärkning 1) måste alltså ℓ_r väljas till

$$\ell_r = \ell_1.$$

Denna deluppgift kan alternativt lösas genom att beräkna överföringsfunktionen $G(s)$ för det återkopplade systemet och använda villkoret $G(0) = 1$.

c. Dynamiken för skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ är

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - (A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y})).$$

Insättning av $y = Cx$ och $\hat{y} = C\hat{x}$ ger

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - (A\hat{x} + Bu + K(Cx - C\hat{x})) \\ &= (A - KC)(x - \hat{x}) = (A - KC)\tilde{x}.\end{aligned}$$

Detta känns igen som en tillståndsform för ett system utan insignal. Det karakteristiska polynomet blir

$$\det(sI - (A - KC)) = \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 4 \end{vmatrix} = s^2 + (4 + k_1)s + 4k_1 + k_2.$$

Identifiering av polynomkoefficienterna med koefficienterna hos det önskade polynomet (6) ger ett ekvationssystem från vilket parametrarna kan bestämmas enligt

$$\begin{cases} 4 + k_1 = 2 \\ 4k_1 + k_2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 16 - 4k_1 = 24 \end{cases}.$$

d. Valet av specifikationspolynomet, och därmed av K, är en avvägning mellan snabbhet och känslighet för störningar och modellfel. Om K väljs så att skattningsfelet avtar väldigt snabbt så blir skattningen $\hat{x}$ t.ex. väldigt känslig för mätstörningar i signalen y, d.v.s. brus i signalen y kan ge kraftigt felaktiga värden på skattningen $\hat{x}$.

5. Man önskar reglera en process som utsätts för en laststörning v enligt figur 3. Målet är designa regulatorerna R_1 och R_2 så att utsignalen y följer referensen r bra.

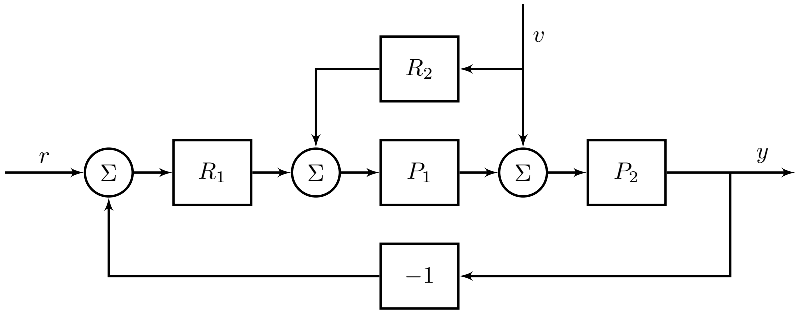
a. Vad är överföringsfunkterna till y från r respektive v? (1 p)

b. Hur ska R_1 och R_2 väljas för att eliminera effekten av laststörningen? Är dessa val alltid användbara i praktiken? (1 p)

Systemet ges av $P_1 = \frac{1}{s+4}$ och $P_2 = \frac{1}{s}$ och man vill reglera det med proportionalregulatorer, $R_1 = K_1$ och $R_2 = K_2$.

c. Välj K_1 så att det slutna systemet får en dubbelpol i -2. (1 p)

d. Välj K_2 så att konstanta störningar helt elimineras. (1 p)



Figur 3 Blockschema för uppgift 5.

Solution

a. Följ pilarna baklänges från y ger

$$y = P_2(v + P_1(R_2 v + R_1(r - y)))$$

Lös ut y

$$y = \frac{P_2(1 + P_1 R_2)v + P_2 P_1 R_1 r}{1 + P_2 P_1 R_1}$$

Överföringsfunktionerna identifieras nu som

$$G_{yv} = \frac{P_2(1 + P_1 R_2)}{1 + P_2 P_1 R_1}, \quad G_{yr} = \frac{P_2 P_1 R_1}{1 + P_2 P_1 R_1}$$

b. Från ovanstående uttryck ses enkelt att $R_2 = \frac{-1}{P_1}$ totalt eliminerar laststörningar ($G_{yv} = 0$). Med detta valet av R_2 påverkar inte R_1 förmågan att eliminera laststörningar och kan väljas fritt, t.ex. så att referensändringar följs bra.

Det är dock inte alltid möjligt i praktiken att sätta $R_2 = \frac{-1}{P_1}$. Till exempel, om P_1 är en ren integrator kommer det krävas att R_2 är en ren derivata, något som inte går att implementera exakt då derivering kräver kännedom om framtiden.

c. Insättning ger

$$G_{yr} = \frac{K_1}{s^2 + 4s + K_1}$$

Vi vill att det karakteristiska polynomet ska vara $(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$, efter inspektion ger det $K_1 = 4$.

d. För att konstanta störningar ska elimineras vill vi att $G_{yv}(0) = 0$, insättning ger då

$$G_{yv} = \frac{s + 4 + K_2}{s^2 + 3s + K_1} \Rightarrow G_{yv}(0) = \frac{4 + K_2}{K_1} = 0 \Rightarrow K_2 = -4$$

6. Vi vill reglera en process som beskrivs av

$$G_P(s) = \frac{3}{(s+4.4)^2}$$

och väljer att använda en PI-regulator

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right).$$

med vilken systemet återkopplas enligt figur 4. Om integraltiden väljs som $T_i = 1/37$ kan kretsöverföringsfunktionen skrivas

$$G_0(s) = G_P(s)G_R(s) = \frac{3K(s+37)}{s(s+4.4)^2}.$$

Bodediagrammet för $G_0(s)$ då $K = 1$ visas i figur 5.

a. Bestäm med hjälp av Bodediagrammet ungefär hur stor förstärkningen $K > 0$ som mest kan vara utan att det återkopplade systemet (från r till y) blir instabilt. (1 p)

b. Anta att $K = 1$ och att det tillkommer en dödtid någonstans i kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$. Bestäm med hjälp av Bodediagrammet hur lång denna dödtid som mest kan vara utan att det återkopplade systemet (från r till y) blir instabilt. (1 p)

c. Vi vill nu modifiera regulatorn så att det återkopplade systemet blir snabbare och samtidigt har en viss robusthet. Vi ersätter därför PI-regulatorn med regulatorn

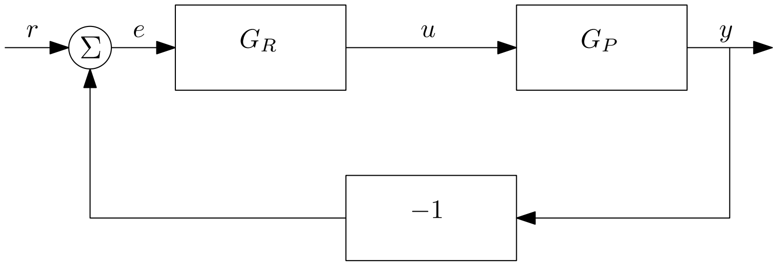
$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)G_K(s),$$

där $G_K(s)$ är en ny överföringsfunktion som vi ska bestämma. Vi antar återigen att $K = 1$, $T_i = 1/37$ samt att det inte finns någon dödtid. För att göra det återkopplade systemet snabbare vill vi öka skärfrekvensen för kretsöverföringsfunktionen och för att få en viss robusthet vill vi att denna ska ha en tillräckligt stor fasmarginal. Bestäm därför $G_K(s)$ så att kretsöverföringsfunktionens skärfrekvens blir 5 rad/s och dess fasmarginal blir 30°. (3 p)

Solution

a. Frekvensen för vilken fasförskjutningen är $-180°$ avläses ur den undre delen av Bodediagrammet till $\omega_0 \approx 5$. Vid denna frekvens är förstärkningen (som visas i den övre delen av Bodediagrammet) $|G(i\omega_0)| \approx 0.5$. Därmed blir amplitudmarginalen $A_m = 1/|G(i\omega_0)| = 1/0.5 = 2$. Amplitudmarginalen anger den största faktor som det öppna systemet (d.v.s. kretsöverföringsfunktionen) kan multipliceras med utan att det slutna (återkopplade) systemet blir instabilt. Alltså måste det gälla att $K < 2$. (Det exakta värdet är $K < 2.0150$.)

b. Systemets skärfrekvens ω_c är den frekvens för vilken förstärkningen är 1, d.v.s. $|G(i\omega_c)| = 1$. I den övre delen av Bodediagrammet ser vi att amplituden är 1 vid ungefär $\omega_c \approx 3.5$. Vid denna frekvens avläser vi fasen ur den undre delen av Bodediagrammet till $\arg G_0(i\omega_c) \approx -160°$, vilket ger fasmarginalen (vinkeln



Figur 4 Återkoppling av systemet i uppgift 6.

till $-180°$ vid skärfrekvensen) $\varphi_m = 180° + \arg G_0(i\omega_c) = 180° - 160° = 20°$. Detta är den största extra fasförskjutning som kan tillföras kretsöverföringsfunktionen vid frekvensen ω_c innan det slutna systemet blir instabilt (eftersom Nyquistkurvan passerar punkten -1 på vänster sida). Denna fasändring motsvarar hos en signal med frekvensen ω_c tiden $L_m = (\varphi_m \cdot \pi/180°)/\omega_c$ (där täljaren innehåller en omvandling från grader till radianer), vilket är systemets dödtidsmarginal, d.v.s. den längsta dödtid som kan adderas innan det återkopplade systemet blir instabilt. Den längsta dödtiden som kan läggas till utan att systemet blir instabilt är alltså $L_m = (20° \cdot \pi/180°)/3.5 \approx 0.1$ s. (Det exakta värdet är $L_m = 0.0903$.)

c. Vi vill att skärfrekvensen ska vara $\omega_c = 5$. För att få en fasmarginal på 30° vid denna frekvens måste faskurvan höjas med 30° eftersom denna ger fasen $-180°$ vid den aktuella frekvensen (vilket kan avläsas i figur 5), vilket skulle motsvara fasmarginalen $\varphi_m = 0$ ifall förstärkningen vore 1 vid $\omega = 5$. En fashöjning kan åstadkommas med en fasavancerande länk

$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN}, \quad N > 1. \tag{9}$$

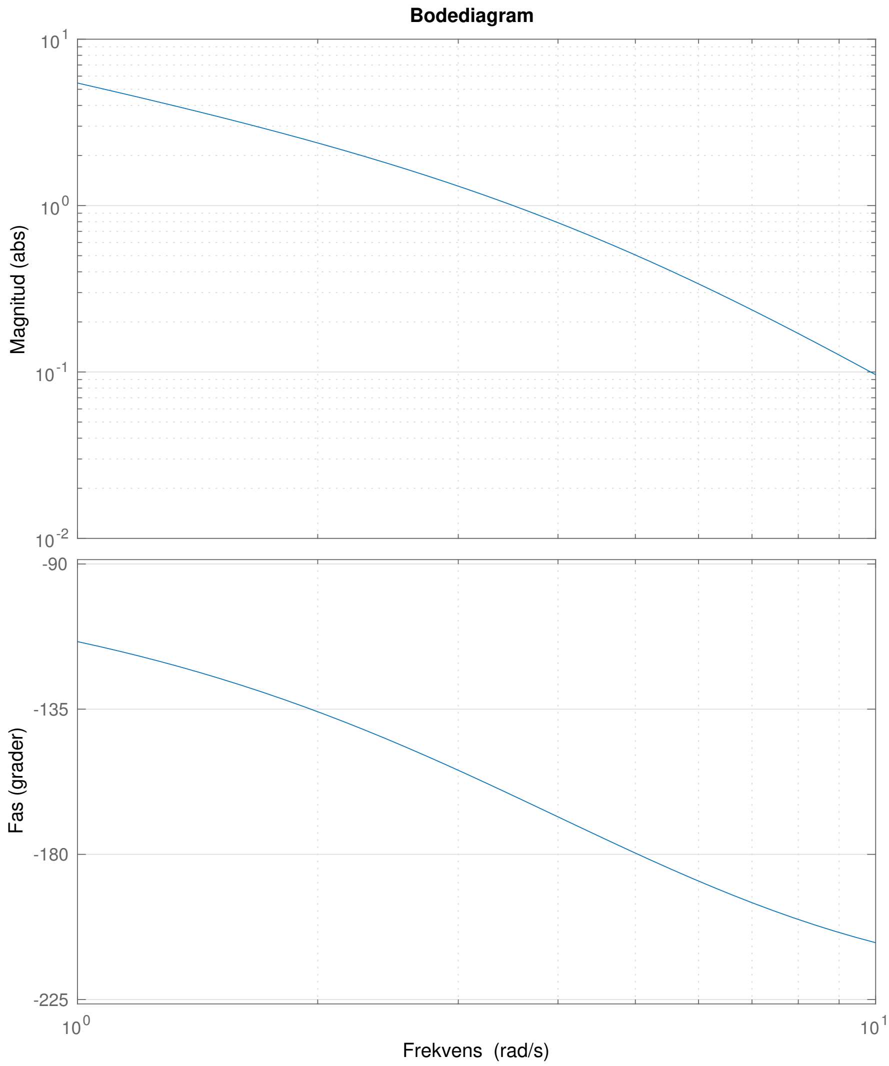
Enligt formelsamlingen kan denna länk åstadkomma en maximal fasökning på $\Delta\varphi = 30°$ ifall man väljer $N = 3$. Från denna kan vi också utläsa att faskurvans topp ligger vid $\omega = b\sqrt{N}$. Eftersom vi vill att den maximala fasökningen ska ske vid den önskade skärfrekvensen väljer vi alltså

$$b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Slutligen vet vi (återigen från formelsamlingen) att länkens förstärkning vid frekvensen $\omega = b\sqrt{N}$ är $K_K\sqrt{N}$. Vid den önskade skärfrekvensen $\omega = 5$ visar amplitudkurvan i Bodediagrammet att förstärkningen är cirka 0.5. För att $\omega = 5$ ska bli systemets skärfrekvens måste alltså amplituden dubbleras vid denna frekvens. Därmed måste vi välja

$$K_K\sqrt{N} = 2 \quad \Rightarrow \quad K_K = \frac{2}{\sqrt{N}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Överföringsfunktionen $G_K(s)$ i regulatorn väljs alltså som (9) med $N = 3$, $b = 5/\sqrt{3}$ och $K_K = 2/\sqrt{3}$.



Figur 5 Bodediagram för kretsöverföringsfunktionen i uppgift 6.