LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 23 augusti 2017 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs av differentialekvationen

$$\dddot{y} - 2\dot{u} + 4\ddot{y} + y = u.$$

a. Bestäm systemets överföringsfunktion. (1 p)

b. Av vilken ordning är systemet? (0.5 p)

c. Är systemet asymptotiskt stabilt? (0.5 p)

Solution

a. Laplacetransformera differentialekvationen:

$$s^3Y(s) - 2sU(s) + 4s^2Y(s) + Y(s) = U(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{2s+1}{s^3+4s^2+1}U(s),$$

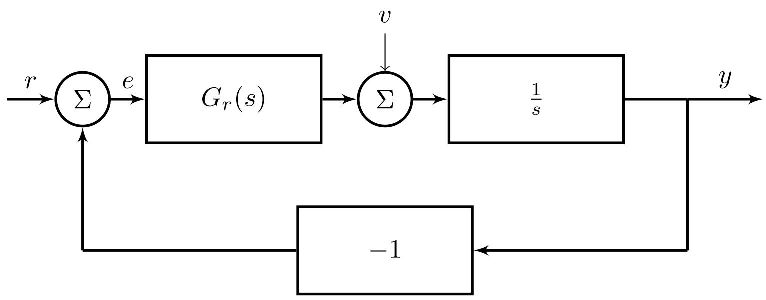
där överföringsfunktionen identifieras som

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^3+4s^2+1}$$

b. Det karaktäristiska polynomet, och således systemet, är av ordning 3.

c. Nej. Stabilitetsvillkoren (se t.ex formelsamlingen) ger att systemet *inte* är asymptotiskt stabilt.

2. Figur 1 visar blockschemat för en reglerkrets.



Figur 1: Blockschema för uppgift 2

a. Beräkna överföringsfuntionen från $R(s)$ till $E(s)$ och från $V(s)$ till $E(s)$. (1 p)

b. Låt $r(t) = 0$ och $v(t)$ vara en stegfunktion med höjden 1. Beräkna felet stationärt för en P regulator. Beräkningar krävs för full poäng. (1 p)

c. Låt $r(t)$ vara en stegfunktion med höjden 1 och $v(t) = 0$. Beräkna felet stationärt för en P regulator. Beräkningar krävs för full poäng. (1 p)

d. Låt $r(t) = 0$ och $v(t)$ vara en stegfunktion med höjden 1. Beräkna felet stationärt för en PI regulator. (1 p)

Solution

a. Från diagramet fås

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - (G_P(s)V(s) + G_P(s)G_R(s)E(s))$$

Lös ut $E(s)$

$$E(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + G_P(s)G_R(s)}}_{G_{RE}} R(s) - \underbrace{\frac{G_p}{1 + G_P(s)G_R(s)}}_{G_{LE}} V(s)$$

b.

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{LE}(s)V(s) = -\lim_{s\to 0} \frac{s^{-1}}{1 + s^{-1}k} = -\lim_{s\to 0} \frac{1}{s+k} = -\frac{1}{k}$$

c.

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{RE}(s)R(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + s^{-1}k} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+k} = 0$$

d. Nu har vi

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = \frac{KsT_i + K}{sT_i}$$

$$e(\infty) = -\lim_{s\to 0} s\frac{s^{-1}}{1 + \frac{KsT_i + K}{s^2 T_i}} = -\lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2 + KsT_i + K} = 0$$

3. Ett system beskrivs av följande olinjära differentialekvation

$$\ddot{x} + \dot{x}\cos(x) + x = 4u.$$

a. Inför tillstånden $x_1 = x$ och $x_2 = \dot{x}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Bestäm alla stationära punkter. (1 p)

c. Linjärisera systemet runt punkten där $u = 15$. (2 p)

Solution

In the state-space form. The system is

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 && (= f_1(x,u)) \\ \dot{x}_2 &= -x_2\cos(x_1) - x_1 + 4u && (= f_2(x,u)) \\ y &= x_1 && (= g(x,u)) \end{aligned} \tag{1}$$

a. From the first equation in (1) we have $x_2^0 = 0$. Substitutin $x_2 = 0$ in the other equation and equating it to zero we have,

$$0 = -x_1 + 4u. \tag{2}$$

Therefore the stationary points are $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (t, 0, t/4)$. We also have $y^0 = x_1$

b. $u = 15$ give the stationary points $(x_1^0, x_2^0, u^0, y^0) = (60, 0, 15, 60)$. The partial derivatives are

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2 \sin(x_1) - 1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\cos(x_1), \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 4$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

Putting in new variables

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \\ \Delta y &= y - y^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Therefore the linearized system is

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x \end{aligned} \tag{4}$$

4.

a. Förklara begreppet integratoruppvridning (wind up) kortfattat och beskriv *ett* sätt att undvika det. (1 p)

b. För ett styrbart system kan polerna teoretiskt placeras godtyckligt långt bort från origo. Ge en anledning till varför detta inte går i praktiken. (1 p)

Solution

a. Se sidan 112 i föreläsningsanteckningarna.

b. Omodellerad dynamik och mätbrus är exampel på anledningar som gör att polerna inte kan placeras godtyckligt.

5. Ett system på tillståndsform ges av

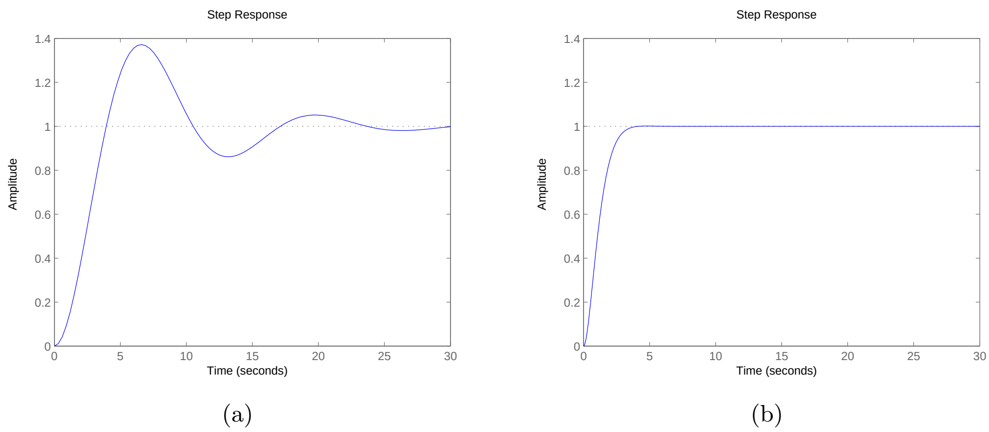
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a. Är systemet styrbart? (1 p)

b. Bestäm en regulator $u = l_r r - Lx$ så att det slutna systemet får statiska förstärkningen 1 och det karaktäristiska polynomet

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

för givna ζ och ω. (1.5 p)



Figur 2: Stegsvar i uppgift 5

c. För $\omega = 0.5$, $\zeta = 0.3$ och $\omega = 1.5$, $\zeta = 0.9$ ges stegsvaren i figur 2. Para ihop de två parametervalen med rätt figur. Motivering krävs! (0.5 p)

Solution

a. The controllability matrix is

$$W_c = [\,B \quad AB\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank of W_c is 2, so it is controllable.

b. The coefficients of

$$\det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_2 s + l_1 - 1$$

and

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

are the same, so $l_1 = \omega^2 + 1$ and $l_2 = 2\zeta\omega$.
The static gain is

$$G(0) = C(-(A - BL))^{-1} B l_r = \frac{-l_r}{1 - l_1} = 1,$$

which gives $l_r = l_1 - 1 = \omega^2$.

c. Because Figure 2a has longer rising time and larger overshoot, it corresponds to $\omega = 0.5$, $\zeta = 0.3$. Figure 2b corresponds to $\omega = 1.5$, $\zeta = 0.9$.

6. Antag att vi vill styra en process där man kan mäta två utsignaler, $y_1(t)$ och $y_2(t)$, samt att vi kan mäta en störning d. Ett möjligt sätt att strukturera regulatorerna skulle kunna vara som i figur 3.

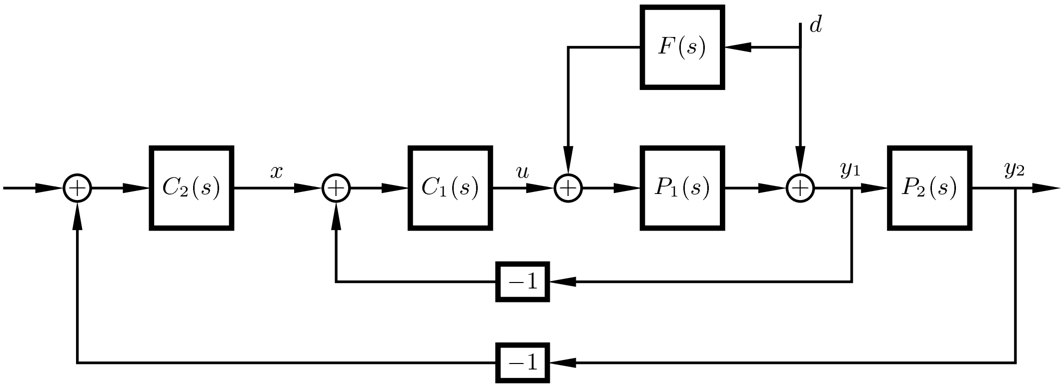
a. Vilka regulatorstrukturer (förutom återkoppling) finns i representerade i figuren? (1 p)

b. Det första processteget är instabilt och kan beskrivas med

$$P_1(s) = \frac{s - 0.5}{(s-2)^2}.$$

Kan man stabilisera den inre loopen med en P-regulator? Om så är fallet, för vilka förstärkningar är den inre loopen asymptotiskt stabil? (2 p)

c. Hur skall $F(s)$ väljas för att helt eliminera inverkan av störningen d? Kommentera huruvida detta är ett sunt val av F. (1 p)



Figur 3: Regulatorstruktur tillhörande uppgift 6.

Solution

a. Framkoppling, F, samt kaskadreglering.

b. Överföringsfunktionen från x till y_1 ges av

$$G_{y_1x} = \frac{C_1(s)P_1(s)}{1 + C_1(s)P_1(s)} = \frac{K(s-0.5)}{s^2 + (K-4)s + 4 - 0.5K}. \tag{5}$$

Ett andra ordningens system är asymptotiskt stabil om alla koefficient i det karakteristiska polynomet är positiva dvs.

$$\begin{aligned} K - 4 &> 0 \\ 4 - 0.5K &> 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Ur dessa ekvationer ser vi att $4 < K < 8$ stabiliserar den inre loopen.

c. Om störningen helt skall elimineras måste bidraget från d helt undertryckas i signalen y_1, dvs

$$1 + P_1(s)F(s) = 0 \tag{7}$$

ur vilken vi kan lösa ut

$$F(s) = -\frac{1}{P_1(s)} = -\frac{(s-2)^2}{s-0.5}. \tag{8}$$

Denna regulator är instabil och ickeproper, dvs gradtalet i täljaren är större än gradtalet i nämnaren. Den går således inte att realisera.

7. En andra ordningens stabil process vars Nyquistdiagram visas i Figur 4 ska regleras med en proportionell regulator

$$G_r(s) = K.$$

a. För vilka positiva värden på K blir det återkopplade systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

b. Om det uppstår en tidsfördröjning på en halv sekund i processen, hur stor eller liten måste skärfrekvensen vara för att det återkopplade systemet ska vara stabilt? (2 p)

Solution

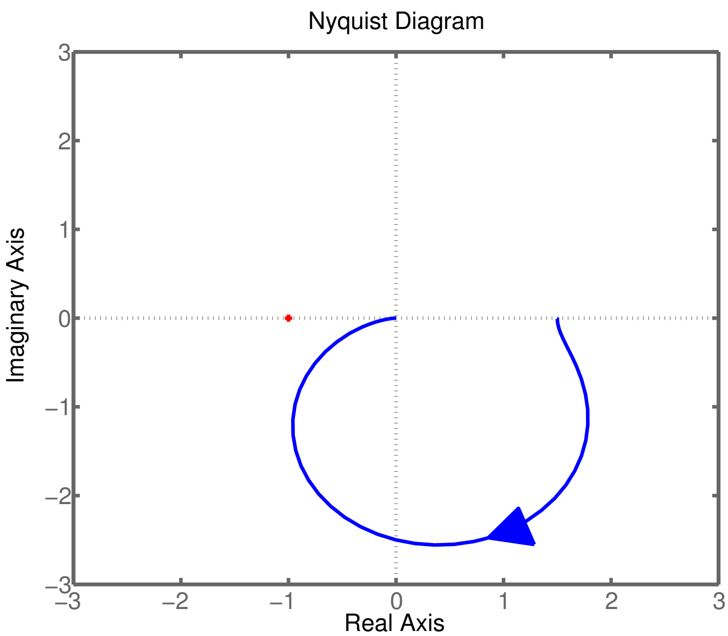
a. Nyquistkurvan skär aldrig negativa reella axeln. Därför kommer det återkopplade systemet att vara stabilt för alla positiva värden på K.

b. Dödtidsmarginalen för systemet är

$$L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c}.$$

För att det återkopplade systemet ska vara stabilt måste alltså

$$L < L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c}$$
$$\iff \omega_c < \frac{\varphi_m}{L},$$



Figur 4: Nyquistdiagrammet för Uppgift **7**

där $L = 0.5$ är tidsfördröjningen. Fasmarginalen avläses ur Nyquistdiagrammet och är

$$\varphi_m \approx 35^\circ = 35\frac{\pi}{180}\text{ rad} \approx 0.6\text{ rad.}$$

Skärfrekvensen måste alltså uppfylla

$$\omega_c < \frac{0.6}{0.5} = 1.2.$$

8. Vid Lunds kommunala reningsverk har en ingenjör kommit fram till att den pump som begränsar hur mycket dagvatten som pumpas in i reningsanläggningen kan beskrivas med överföringsfunktionen

$$P(s) = \frac{8}{(s+2)^2}.$$

Ett av problemen med den nuvarande P-regulatorn är att den dels är för långsam samt att den ger ett bestående reglerfel. För att komma åt dessa problem vill man istället använda en PI-regulator. Specifikationen på det nya reglersystemet säger att skärfrekvensen skall vara dubbelt så stor som den som erhölls vid P-reglering med $K = 1$. Vidare skall fasmarginalen vara 45°. Hur skall PI-regulatorns parametrar väljas för att möta specifikationen? Bodediagrammet för det öppna systemet med $K = 1$ kan ses i figur 5. (3 p)

Solution

Från Bodediagrammet, eller från beräkningar, ser vi att den ursprungliga skärfrekvensen är $\omega_c = 2$. Den nya skärfrekvensen skall således vara $\omega_c^* = 4$. PI-regulatorns överföringsfunktion kan skrivas som

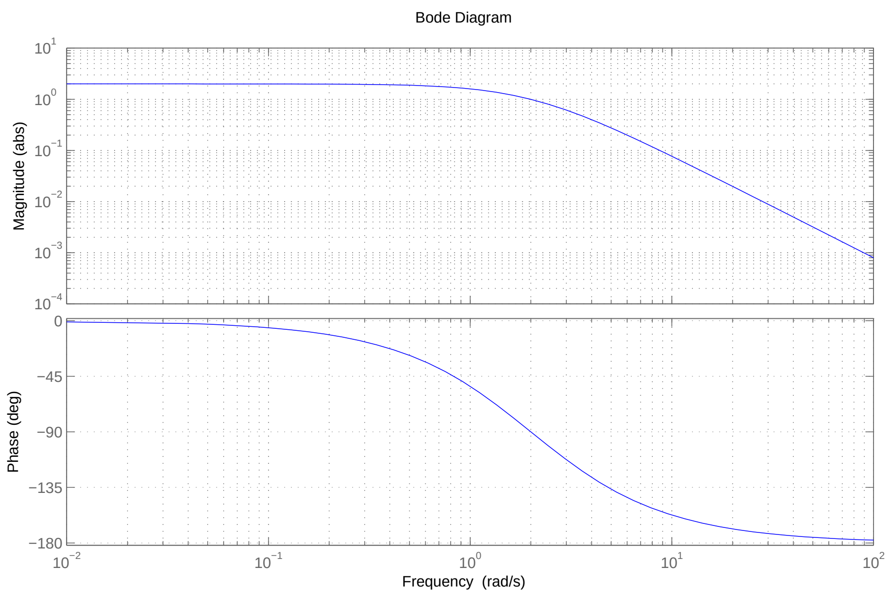
$$C(s) = \frac{K(1 + sT_i)}{sT_i} \tag{9}$$

och det öppna systemet, med PI-regulator, som $G(s) = C(s)P(s)$. Fasmarginalen ges av

$$\varphi_m = 180° + \arg G(i\omega_c^*) = 180° - 90° + \arctan(\omega_c^* T_i) + \arg(P(i\omega_c^*)) \tag{10}$$

Fasbidraget från processen kan utläsas direkt från Bodediagrammet eller beräknas som

$$\arg(P(i\omega_c^*)) = -2\arctan\left(\frac{\omega_c^*}{2}\right) = -126.9°. \tag{11}$$



Figur 5: Bodediagrammet för det öppna systemet i uppgift 8.

Fasmarginalen skall vara 45° kan alltså skrivas som

$$\varphi_m = -36.9^\circ \arctan(4T_i) = 45^\circ \tag{12}$$

ur vilken vi kan lösa ut integraltiden

$$T_i = \frac{\tan(45^\circ + 36.9^\circ)}{4} = 1.75. \tag{13}$$

Då återstår bara att välja K så att ω_c^* är den nya skärfrekvensen. Det öppna systemets förstärkning är

$$|G(i\omega)| = |C(i\omega)|\,|P(i\omega)| = \frac{K\sqrt{1+\omega^2 Ti^2}}{\omega T_i}\frac{8}{\omega^2+4}. \tag{14}$$

Att ω_c^* är systemets skärfrekvens innebär att

$$\left|G(i\omega_c^4)\right| = \frac{K\sqrt{1+162Ti^2}}{4T_i}\frac{8}{16+4} = 1 \tag{15}$$

ur vilken vi kan lösa ut

$$K = \frac{10T_i}{\sqrt{(1+16T_i)}} = 2.46. \tag{16}$$

Förstärkning hos processen vid den nya skärfrekvensen kunde också ha läst av i Bodediagrammet.