LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
**REGLERTEKNIK**

# Reglerteknik AK, FRT010

**Tentamen 20 april 2017 kl 8–13**

## Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

## Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

## Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

**1.** Betrakta systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ där (3 p)

$$G(s) = \frac{2}{s-4}$$

**a.** Ange en differentialekvation som beskriver sambandet mellan $y(t)$ och $u(t)$.

**b.** Vad blir stegsvaret till $G(s)$?

**c.** Beräkna gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ för stegsvaret.

*Solution*

**a.**

$$y'(t) - 4y(t) = 2u(t)$$

**b.** Invers laplace transformering av $Y(s) = \frac{2}{s-4}\frac{1}{s}$ ger (se tabell i formelsamling)

$$y(t) = 2\frac{e^{4t}-1}{4} = \frac{1}{2}(e^{4t}-1).$$

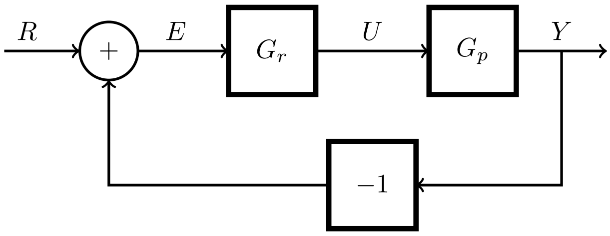
**c.** Gränsvärdet är $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$. Slutvärdesteoremet går ej att använda här, dess formel kommer ge fel svar.

**2.** En process ges av (2 p)

$$G_p(s) = \frac{2}{s-4}.$$

Processen återkopplas enkelt enligt Figur 1 med en PI-regulator som ges av

$$G_r(s) = k_p + \frac{k_i}{s}.$$




**Figur 1** Enkelt återkopplat system i problem 2.

**a.** Bestäm slutna systemets karakteristiska polynom.

**b.** Om möjligt, bestäm parametrarna $k_p$ och $k_i$ så att slutna systemet får poler i $-2$ (dubbelpol). Om ej möjligt, motivera varför.

*Solution*

**a.**

$$Y = \frac{G_p G_r}{1 + G_p G_r} R = \frac{\frac{2}{s-4}(k_p + \frac{k_i}{s})}{1 + \frac{2}{s-4}(k_p + \frac{k_i}{s})} R = \frac{2(sk_p + k_i)}{s(s-4) + 2(sk_p + k_i)} R$$

Karakteristiskt polynom är alltså $s(s-4) + 2(sk_p + k_i)$.

**b.** Vi vill ha karakteristisk ekvation $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$. Resultatet i deluppgift a och identifiering av kofficienter ger ekvationerna $-4 + 2k_p = 4$ och $2k_i = 4$, vilket har lösningen $k_p = 4$ och $k_i = 2$.

**3.** Betrakta systemet (2 p)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**a.** För vilka parametrar $a$ är systemet styrbart?

**b.** För vilka parametrar $a$ är systemet observerbart?

*Solution*

**a.** Vi får

$$\det W_s = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2a \end{pmatrix} = 2a + 2.$$

Systemet är styrbart om $2a + 2 \neq 0$, dvs $a \neq -1$.

**b.** Eftersom

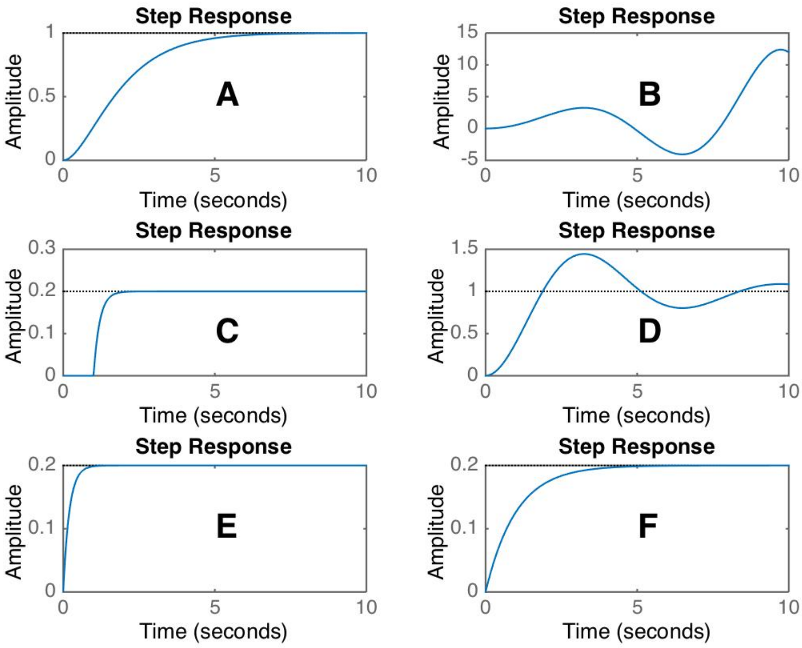
$$\det W_o = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

så är systemet inte observerbart för något $a$.

**4.** Para ihop följande överföringsfunktioner med stegsvaren i Figur 2. Motivering krävs. (3 p)

$$G_1 = \frac{1}{s+5} \qquad G_2 = \frac{0.2}{s+1} \qquad G_3 = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$G_4 = \frac{1}{s^2+0.5s+1} \qquad G_5 = \frac{1}{s^2-0.5s+1} \qquad G_6 = \frac{e^{-s}}{s+5}$$




**Figur 2** Stegsvar i uppgift 4.

*Solution*

$G_6$ har en tidsfördröjning och hör därför ihop med C. $G_5$ är instabil och hör ihop med B. $G_1$ är ett första ordningens system med tidskonstant 1/5, hör ihop med E. $G_2$ är första ordningen system med tidskonstan 1, är därför F. Stegsvar A och D börjar med noll derivata och hör ihop med system med relativ grad 2, dvs $G_3$ och $G_4$. Eftersom $G_4$ har lägst dämpning är denna D och därför hör $G_3$ och A ihop. Svar: $G_1 = E$, $G_2 = F$, $G_3 = A$, $G_4 = D$, $G_5 = B$, $G_6 = C$.

**5.** (5 p)

De holländska elektronikingenjörerna van der Pol och van der Mark observerade på 1920-talet en typ av oscillationer i strömmen hos elektriska kretsar med vakuumrör. Fenomenet kan beskrivas med den olinjära differentialekvationen

$$\ddot{z} - \mu(1 - z^2)\dot{z} + z = u$$

där $z$ är strömmen och $u$ är den drivande in-signalen. Antag att man vill mäta $z$ med den olinjära sensorn

$$y = z^3 + \varepsilon u.$$

**a.** Skriv systemet på tillståndsform. Låt $z = x_1$ och $\dot{z} = x_2$.

**b.** Hitta systemets alla stationära punkter $(x^0, u^0, y^0)$.

**c.** Linjärisera systemet kring en stationär punkt där $u^0 = 2$ och skriv systemet på tillståndsform.

**d.** För vilka värden på $\mu$ och $\varepsilon$ är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt?

*Solution*

**a.** Med $z = x_1$ och $\dot{z} = x_2$ erhålls

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 &&= f_1(x,u) \\
\dot{x}_2 &= u + \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 &&= f_2(x,u) \\
y &= x_1^3 + \epsilon u &&= g(x,u)
\end{aligned} \tag{1}$$

**b.** En stationär punkt är en punkt där tillståndens derivator är noll. För den första ekvationen i (1) gäller

$$\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2^0 = 0.$$

Insättning av $x_2^0 = 0$ i den andra ekvationen ger

$$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow u^0 - x_1^0 = 0 \Leftrightarrow u^0 = x_1^0.$$

Utsignalen i stationäritet är

$$y^0 = (x_1^0)^3 + \epsilon u^0 = (x_1^0)^3 + \epsilon x_1^0.$$

De stationära punkterna $(x^0, u^0, y^0)$ ges således av

$$(\, c, \quad 0 \quad c, \quad c^3 + \epsilon c\,)\,.$$

**c.** Den stationära punkten kring vilket systemet skall linjäriseras är $(2, 0, 2, 8{+}2\epsilon)$. De partiella derivatorna ges av

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 & \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2\mu x_1 x_2 - 1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \mu(1 - x_1^2) & \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1 \\
\frac{\partial g}{\partial x_1} = 3x_1^2 & \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial g}{\partial u} = \epsilon
\end{array}$$

Insättning av den stationära punkten och införandet av variabelbytet

$$\Delta x = x - x^0, \quad \Delta u = u - u^0, \quad \Delta y = y - y^0$$

ger då det linjäriserade systemet på tillståndsform

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3\mu \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \\
\Delta y &= \begin{bmatrix} 12 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \epsilon \Delta u
\end{aligned}$$

**d.** Det linjäriserade systemets karakeristiska polynom är

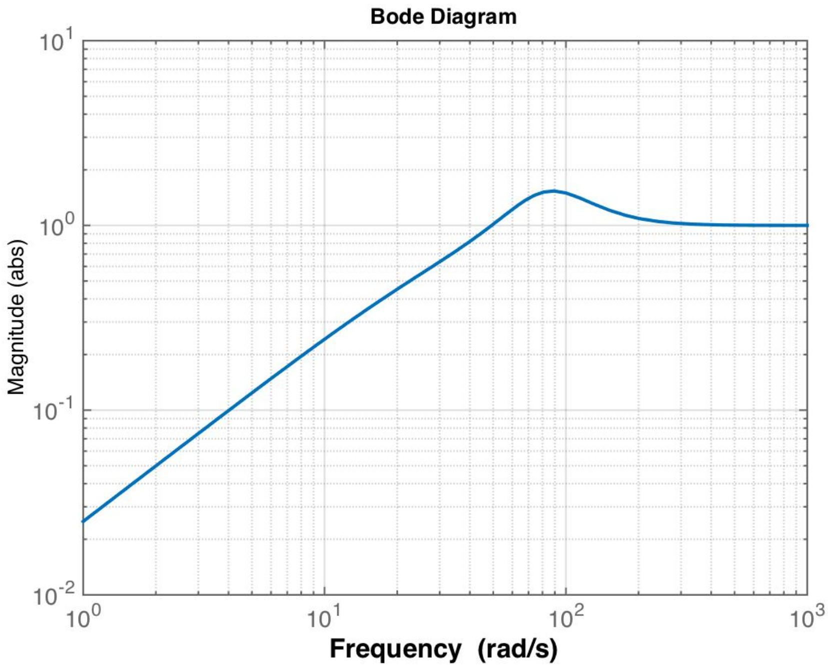
$$\det(sI - A) = s(s + 3\mu) + 1 = s^2 + 3\mu s + 1 = 0.$$

För ett system av andra ordningen är asymptotisk stabilitet ekvivalent med att det karakteristiska polynomets koefficienter är positiva. Det linjäriserade systemet är således asymptotiskt stabilt för $\mu > 0$. Stabiliteten är oberoende av $\epsilon$.

**6.** I figur 3 visas amplitudkurvan $|S(i\omega)|$ för känslighetsfunktionen (2 p)

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_r(s)}$$

.




**Figur 3** Amplitudkurva $|S(i\omega)|$ i uppgift 6.

**a.** Antag att referenssignalen $r(t)$ är en sinus-signal med frekvensen 2 Hz. Beräkna parametrarna $A$ och $B$ i uttrycket för felsignalen (dvs $E = R - Y$ i figur 1)

$$e(t) = A\sin(Bt + \phi).$$

**b.** Enligt figuren är maximala känsligheten $M_s \approx 1.5$. Ett av följade värden på amplitudmarginalen är korrekt. Vilket? Motivera.
$A_m \approx 1/1.5$, $A_m \approx 1.5$, $A_m \approx 2$, $A_m \approx 5$.

*Solution*

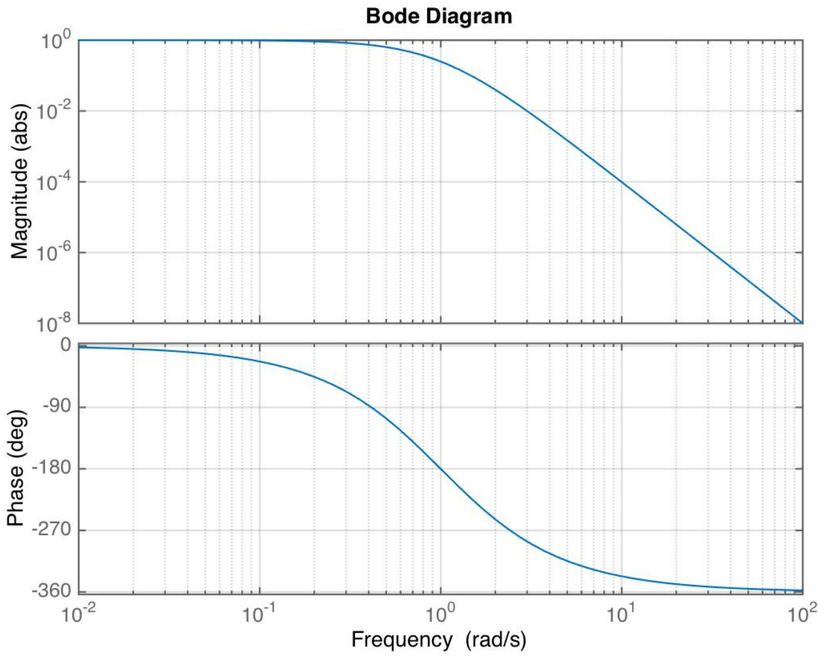
**a.** Vi får $B = 2\pi \cdot 2 \approx 12.6$ rad/s. Vi avläser för den frekvensen att $A \approx 0.3$.

**b.** Eftersom avståndet från Nyquistkurvan till punkten -1 ges av $1/|S|$ så är kortaste avståndet $1/M_s = 1/1.5 = 0.67$. Det betyder att Nyquistkurvan inte kan skära negativa reella axeln i intervallet [-1, -0.33]. Därför är amplitudmarginalen åtminstone 3. Enda möjliga rätta svar är därför $A_m = 5$.

**7.** Skissa nyquistkurvan till systemet (3 p)

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$$

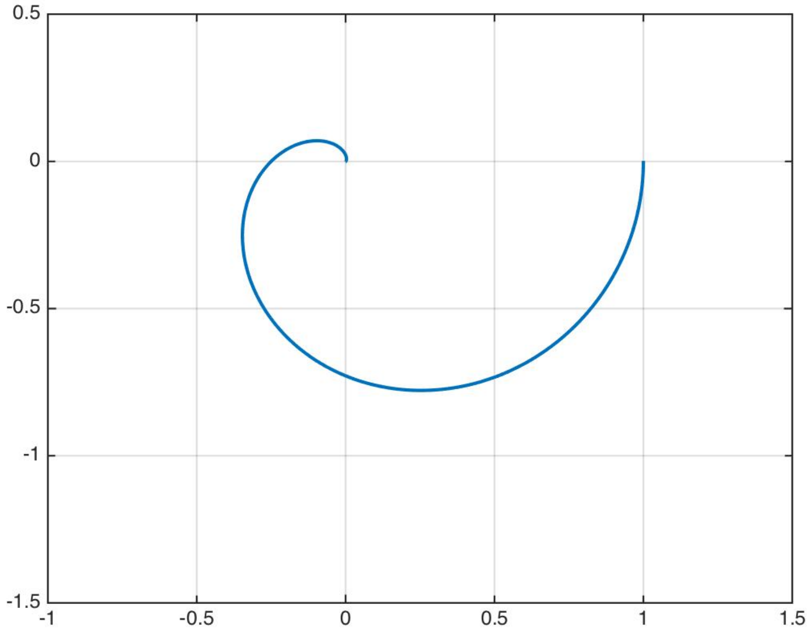
och bestäm för vilka $K > 0$ det återkopplade systemet med $u = K(r - y)$ blir stabilt. Som ledning ges bodediagrammet till $G_p$ i figur 4.




**Figur 4** Bodediagram för $G_p$ i uppgift 7.

*Solution*

Skärningen vid negativa reella axeln sker då fasen är $-180$ grader, vilket inträffar för $\omega_0 = 1$. Vi har $|G_p(i\omega_0)| = 1/|1 + i|^4 = 0.25$. Slutna systemet blir stabilt då $1/K \geq 0.25$, dvs $K \leq 4$.




**Figur 5** Nyquistkurva för $G_p$ i uppgift 7.

**8.** Vi vill konstruera en farthållare för en bil och använder ett första ordningens system som modell för hur hastigheten $y$ beror på insignalen $u$. (5 p)

$$Y = G(s)U(s) = \frac{b}{s+a}U(s).$$

**a.** Figur 6 visar hur hastigheten $y$ påverkas av ett enhetssteg i insignalen $u$. Bestäm parametrarna $b$ och $a$.

**b.** Antag i resten av uppgiften att $b = 1$ och $a = 1$. Bildynamiken kan då skrivas som $\dot{x} = -x + u, \quad y = x$. För att kunna hantera laststörningar inför vi ett extra tillstånd

$$x_i(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau,$$

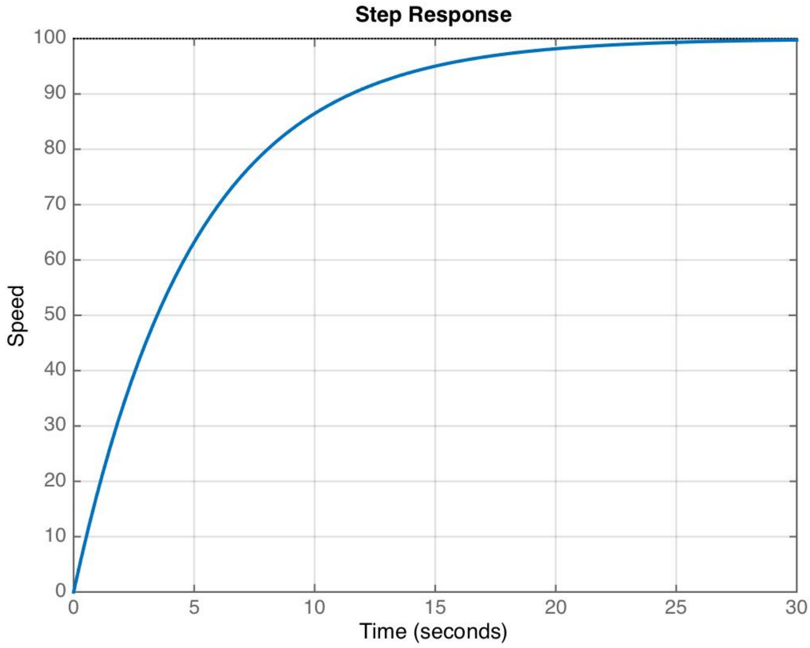
där $r$ är referenssignal. Skriv systemet på tillståndsform och bestäm en styrlag av formen

$$u = l_r r - L \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

med $L = [\, l_1 \quad l_i \,]$ som ger ett slutet system med karakteristiskt polynom $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ med dämpning $\zeta = 0.75$ och egenvinkelfrekvens $\omega = 1$.

**c.** Beräkna slutna systemets överföringsfunktion $Y(s) = G_{cl}(s)R(s)$. Det visar sig att systemets statiska förstärkning $G_{cl}(0)$ är lika med 1 oberoende av värdet på $l_r$. Förklara varför.

**d.** Beskriv hur parametern $l_r$ kan väljas, till exempel genom att diskutera dess påverkan på slutna systemets stegsvar.




**Figur 6** Stegsvar för bilen i uppgift 8.

*Solution*

**a.** Vi avläser tidskonstanten till $T = 5$ vilket ger $a = 1/T = 0.2$. Eftersom stationär förstärkning är $G(0) = 100$ fås $b/a = 100$. Detta ger $b = 100a = 20$.

**b.** Det extra tillståndet ger oss systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}.$$

Med den givna styrlagen får vi det slutna systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-l & -l_i \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_r \\ 1 \end{bmatrix} r(t).$$

Parametrarna $l$ och $l_i$ bestämmer vi genom att matcha systemets karakteristiska polynom mot det önskade

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= s^2 + (1+l)s - l_i \\ &= s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 \\ &= s^2 + 1.5s + 1. \end{aligned}$$

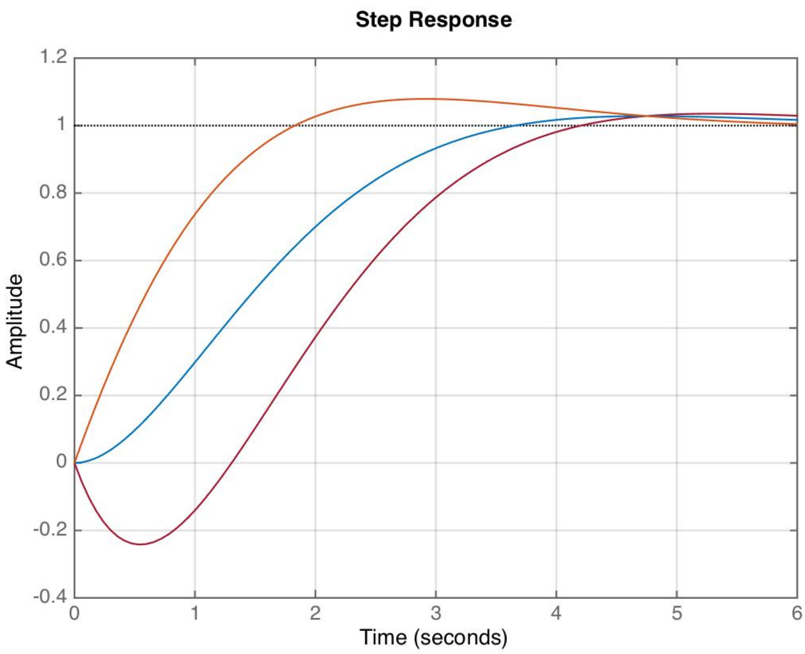
Ur detta får vi att $l = 0.5$ och $l_i = -1$.

**c.** Vi får

$$G_{cl}(s) = \frac{l_r s + 1}{s^2 + 1.5s + 1}$$

Slutna systemet får alltid statisk förstärkning $G_{cl}(0) = 1$. Då det extra tillståndet är integralen av reglerfelet kommer vi stationärt alltid uppnå $r - y = 0$, dvs $y = r$, vilket betyder att slutna systemets statiska förstärkning är 1, oberoende av $l_r$.

**d.** Genom att ändra $l_r$ kan vi påverka slutna systemets nollställen. Väljer vi exempelvis $l_r < 0$ kommer vi få ett negativt initialsvar. Väljer man $l_r > 0$ kan man snabba upp systemets stegsvar, men för stort värde på $l_r$ kan leda till översläng. Stegsvar för tre olika värden på $l_r$ visas i figur 7.




**Figur 7** Stegsvar för systemet i uppgift 8 med $l_r = -1$, $l_r = 0$ och $l_r = 1$.