LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRT010

Tentamen 10 januari 2017 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.

1. Ett system beskrivs av följande differentialekvation

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = \dot{u} + u.$$

a. Beräkna systemets överföringsfunktion. (1 p)

b. Skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

Solution

a. Laplace transformation av differential ekvationen ger (antag att alla initialtillstånd är 0)

$$(s^2 + 3s + 1)Y(s) = (s + 1)U(S) \Leftrightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{s + 1}{s^2 + 3s + 1}}_{G(s)} U(s).$$

b. En tillståndsrealisering av systemet hittas enklast med hjälp av någon av de kanoniska tillståndsformerna. Den styrbara kanoniska formen ges av

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ett olinjärt system ges av

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 + 1)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

a. Verifiera att $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u = 0$ är en stationär punkt. (1 p)

b. Linjärisera systemet runt den stationära punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u = 0$. (1 p)

c. Är systemet stabilt runt den stationära punkten? (1 p)

Solution

a. När $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u = 0$ är $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$.

b. Introducera de nya variablerna

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \\ \Delta y &= y - y^0 \end{aligned}$$

Låt

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, u) &= -(x_2 + 1)x_1 \\ f_2(x_1, x_2, u) &= -x_2 + u \\ g(x_1, x_2, u) &= x_1 \end{aligned}$$

De partiella derivatorna blir

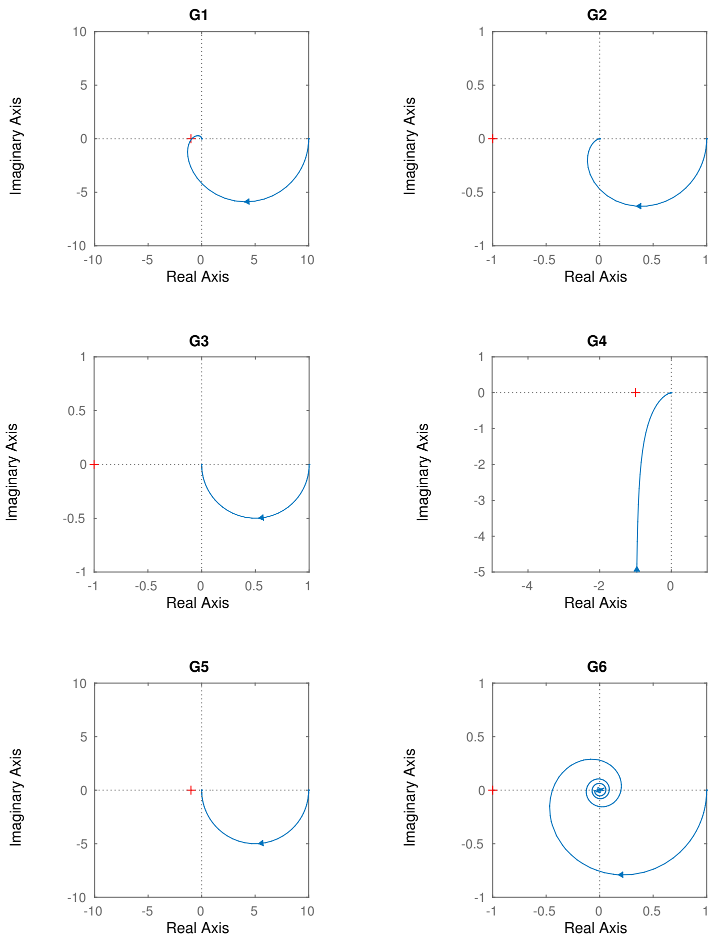
$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -(x_2+1) &&\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -x_1 &&\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 &&\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 &&\frac{\partial f_2}{\partial u} = 1 \\
&\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1 &&\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 &&\frac{\partial g}{\partial u} = 0
\end{aligned}
$$

Det linjäriserade systemet runt punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0,0,0)$ ges då av

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta x}{dt} &= \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \Delta x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u \\
\Delta y &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \Delta x
\end{aligned}
$$

c. A-matrisens egenvärden är båda -1, så systemet är stabilt runt den givna stationära punkten.

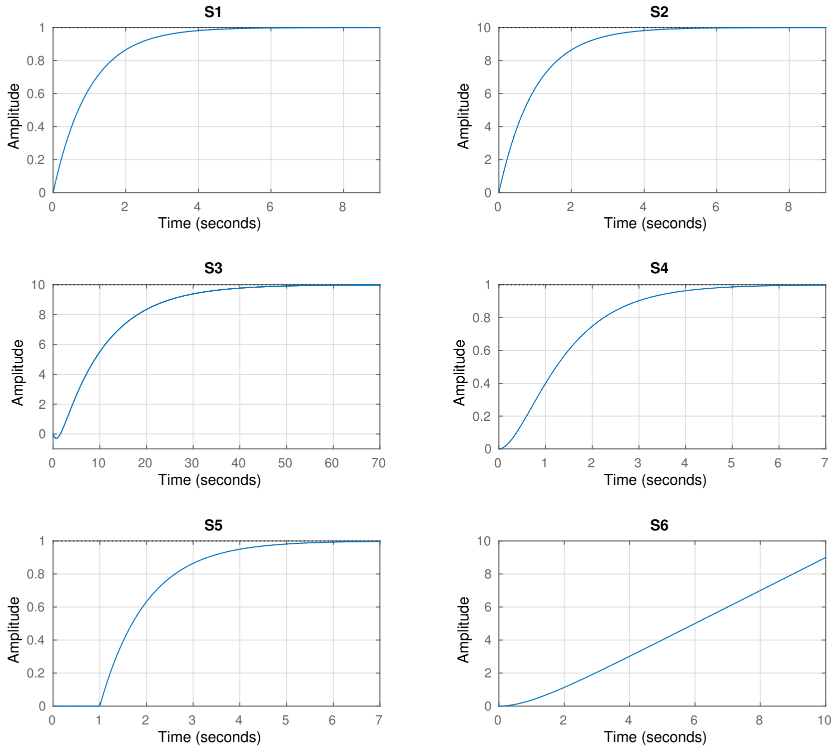
3. Figur 1 och 2 visar Nyquistkurvan respektive stegsvaret för sex olika system. Para ihop rätt Nyquist kurva med rätt stegsvar. Glöm inte att motivera dina svar. (3 p)



Figur 1 Nyquistkurvor till Problem 3

Solution

- G2 = S4. Andra ordningens system med statisk förstärkning 1.
- G3 = S1. Första ordningens system med statisk förstärkning 1.
- G4 = S6. Systemet har en integrator.
- G5 = S2. Första ordningens system med statisk förstärkning 1.
- G6 = S5. Första ordningens system med tidsfördröjning.
- G1 = S3. Statisk förstärkning 10.



Figur 2 Stegsvar till Problem 3

4. Ange sant eller falskt för påståendena i **a**-**f** och motivera varför. Poäng ges endast till svar med korrekt motivering. (3 p)

a. En fasretarderande länk kan användas till att minska stationära fel.

b. Ett Kalmanfilter kan alltid användas till att skatta samtliga tillstånd i ett system.

c. Ett första ordningens system utan dödtid har alltid oändlig amplitudmarginal.

d. Om man minskar integraltiden T_i hos en PID-regulator höjs regulatorns förstärkning vid låga frekvenser.

e. När en process återkopplas enkelt med en P-regulator kommer det alltid att uppstår ett stationärt fel när man gör en stegändring i börvärdet.

f. Vid stort mätbrus bör Kalmanfiltrets förstärkning K väljas stor, dvs. observeraren bör designas till att vara snabb.

Solution

a. **Sant**, en fasretarderande länk har hög förstärkning vid låga frekvenser vilket medför att stationära fel minskar.

b. **Falskt**, systemet måste vara observerbart för att samtliga tillstånd ska kunna skattas.

c. **Sant**, ett första ordningens system har bara en pol vilket medför att fasen inte understiger -90 grader. Amplitudmarginalen blir därför oändlig.

d. **Sant**, minskad integraltid T_i medför en ökad integralverkan och därmed ökad förstärkning vid låga frekvenser.

e. **Falskt**, om processen innehåller en integrator erhålls inga stationära fel vid en stegändring i börvärdet.

f. **Falskt**, vid stort mätbrus bör man lita mer på sin processmodell än sina mätsignaler. Detta motsvarar att K väljs litet.

5. Calle har fått i uppgift att designa en regulator för följande system

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

a. Är system styrbart? (1 p)

b. Designa en tillståndsåterkoppling på formen $u = -Lx$ så att slutna system får en dubbelpol i -2. (2 p)

c. Målet med regleringen är att placera polerna, inget krav ställs på utsignalen. Calle får därför själv välja vilket tillstånd han ska mäta och ha som utsignal. Hjälp Calle att välja vilket tillstånd som ska mätas, och motivera varför. (1 p)

d. Designa ett Kalmanfilter med dubbelt så snabba poler som systemets poler. (2 p)

Solution

a. Systemets styrbarhetsmatrix beräknas till

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

W_c har full rank eftersom kolonnerna är linjärt oberoende, alltså är systemet styrbart.

b. Slutna systemets poler ges av

$$\begin{aligned} |sI - (A - BL)| &= \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ l_1 & s-3+l_2 \end{vmatrix} \\ &= (s-1)(s-3+l_2) + 2l_1 \\ &= s^2 - 3s + l_2 s - s + 3 - l_2 + 2l_1 \\ &= s^2 + (-4 + l_2)s + 3 + 2l_1 - l_2 \end{aligned}$$

Vilket ska jämföras med $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$. Detta ger $l_1 = 4.5$ och $l_2 = 8$.

c. y bör väljas som $y = x_1$ eftersom system då är observerbart.

d. Kalman filtrets poler ges av

$$\begin{aligned} |sI - A + KC| &= \begin{vmatrix} s-1+k_1 & -2 \\ k_2 & s-3 \end{vmatrix} \\ &= (s-1+k_1)(s-3) + 2k_2 = s^2 - 3s - s + 3 + k_1 s - 3k_1 + 2k_2 \\ &= s^2 + (-4 + k_1)s + 3 - 3k_1 + 2k_2 \end{aligned}$$

Vilket ska jämföras med $(s+4)^2 = s + 8s + 16$. Detta ger $k_1 = 12$ och $k_2 = 24.5$.

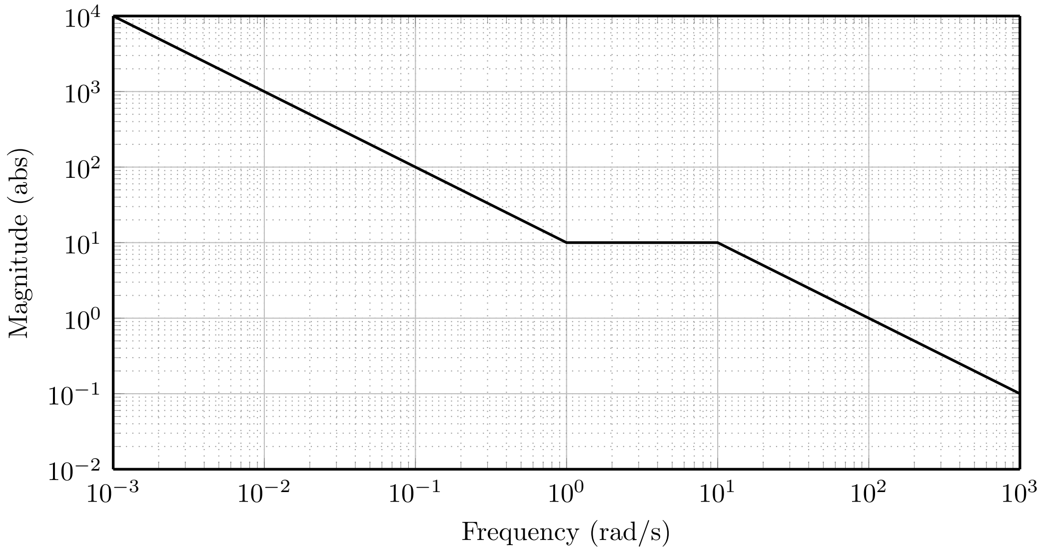
6. Ett systems överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s/10+1)}.$$

Rita asymptoten för $|G(i\omega)|$. Använd mallen på sista sidan och lämna in den med dina lösningar. (2 p)

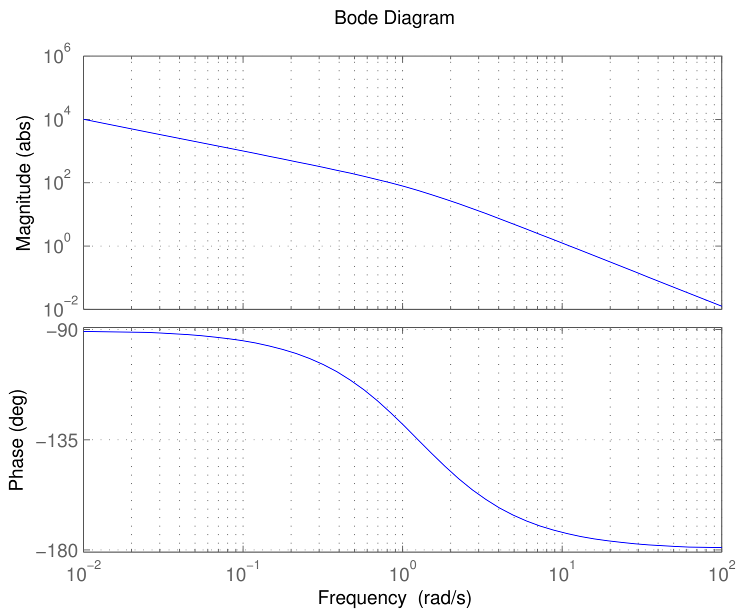
Solution

Lågfrekvens asymptoten är $G(s) \approx \frac{10}{s}$ och har beloppet 10^2 för $\omega = 0.1$. Systemet har sedan ett nollställe i $s = -1$ som gör att beloppets lutning bryts upp med lutning $+1$ så att lutningen blir 0 vid $\omega = 1$. Systemet har även en pol i $s = 10$, vilket gör att beloppets lutning bryts ner med -1 så att lutningen blir -1 vid $\omega = 10$. Asymptoten visas i Figur 3.



Figur 3 Bodediagram för Problem 6

7. Bodediagrammet för en kretsöverföringsfunktion visas i Figur 4.



Figur 4 Bodediagrammet för Problem 7

a. Är det slutna systemet stabilt? (1 p)

b. För det återkopplade systemet, ger ett referensvärde i form av en ramp ett stationärt fel. Designa en kompensator som minskar detta fel med en faktor 10. (2 p)

Solution

a. När kretsöverföringsfunktionens fas är -180 grader, är magnituden mindre än 1, så det slutna systemet är stabilt.

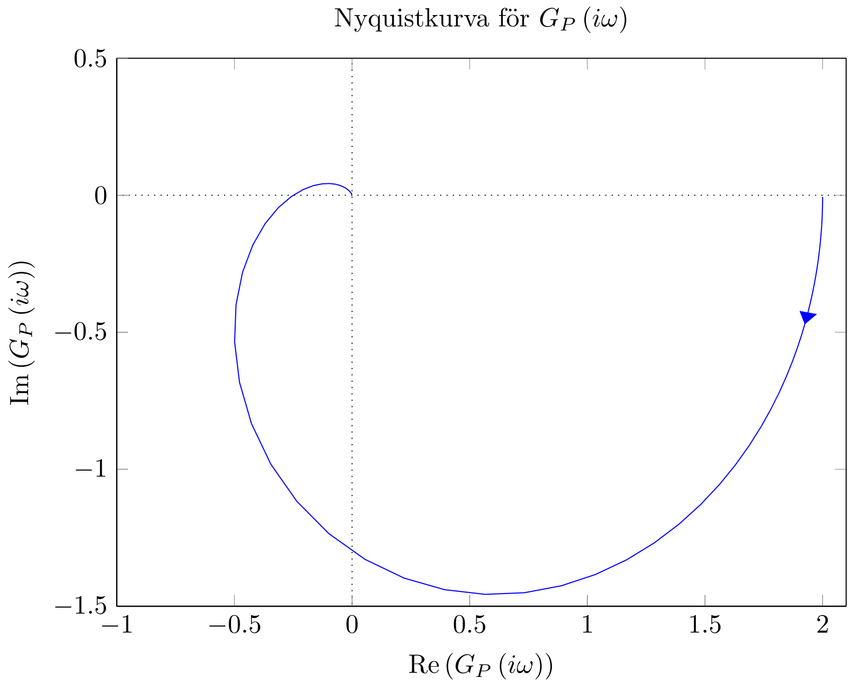
b. För att få ett mindre stationärt fel, väljer vi en fasretarderande länk. Vi vill minska det stationära felet med en faktor 10. Eftersom kretsöverföringsfunktionen innehåller en integrator blir därför $M = 10$. Ifrån Bodediagrammet fås $\omega_c = 10.1$, så $a = 0.1\omega_c \approx 1$. Kompensationslänken blir således

$$G_K(s) = \frac{s+1}{s+0.1}$$

8. En process $G_P(s)$ är given på formen

$$G_P(s) = \frac{K_P}{\left(1 + \dfrac{s}{10}\right)^n}$$

Nyquistkurvan för G_P visas i Figur 5.

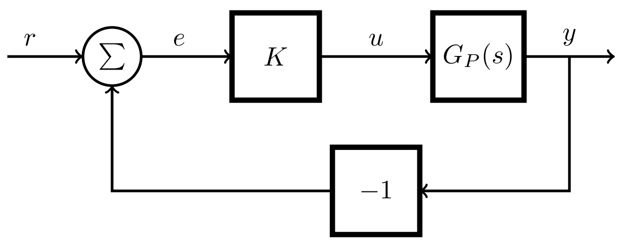


Figur 5 Nyquistdiagram för processen G_P i Problem 8.

a. Bestäm processens statiska förstärkning K_P och ordning n. (1 p)

b. Bestäm amplitudmarginalen A_m. (0.5 p)

c. Processen $G_P(s)$ regleras av en proportionell regulator med förstärkning $K > 0$, enligt Figur 6. Bestäm det minsta möjliga stationära fel $e\,(\infty)$ som kan uppnås då referensen r är ett enhetssteg. (1.5 p)



Figur 6 Det slutna systemet i uppgift 8c.

Solution

a. Processens statiska förstärkning, K_P, utläses ur Nyquistkurvan till 2, och ordningen n till 3 (fasen -270°visar på att systemet har tre poler).

b. Amplitudmarginalen, A_m, utläses ur Nyquistkurvan till 4 (vilket också är det exakta värdet som går att bestämma analytiskt om man löst uppgift 8a fullständigt).

c. Överföringsfunktionen från referensen r till felet e är

$$G_{r\to e}(s) = \frac{1}{1+KG_P(s)}.$$

För alla värden på K sådana att $sE(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet, ges det stationära felet, $e(\infty)$, av

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{r\to e}(s)R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG_P(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+KG_P(0)} = \frac{1}{1+2K} \end{aligned}$$

Amplitudmarginalen, $A_m = 4$, visar högsta möjliga förstärkningen K hos P-regulatorn som fortfarande ger ett stabilt system. Därmed fås ett lägsta värde på $e(\infty)$ som

$$e(\infty) > \frac{1}{1+2\cdot 4} = \frac{1}{9}.$$

Personlig identifierare: ______________________

Mall för Bodediagram till Problem 6

Ta bort den här sidan ifrån tentan och lämna i den tillsammans med dina lösningar.