LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 24 oktober 2016 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 2016-10-24

1. Ett system modelleras enligt följande linjära differentialekvation

$$\ddot{y} + \dot{y} = u$$

a. Bestäm systemets poler och nollställen. Är systemet instabilt, stabilt eller asymptotiskt stabilt? (1.5 p)

b. Bestäm ett uttryck för systemets impulssvar som funktion av tiden. Skissa även impulssvarets utseende. (1.5 p)

Solution

a. Laplacetransform ger systemets överföringsfunktion G från u till y enligt

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Systemets poler bestäms till $0, -1$. Nollställen saknas. Eftersom systemet har en pol i origo är det stabilt, men inte asymptotiskt stabilt.

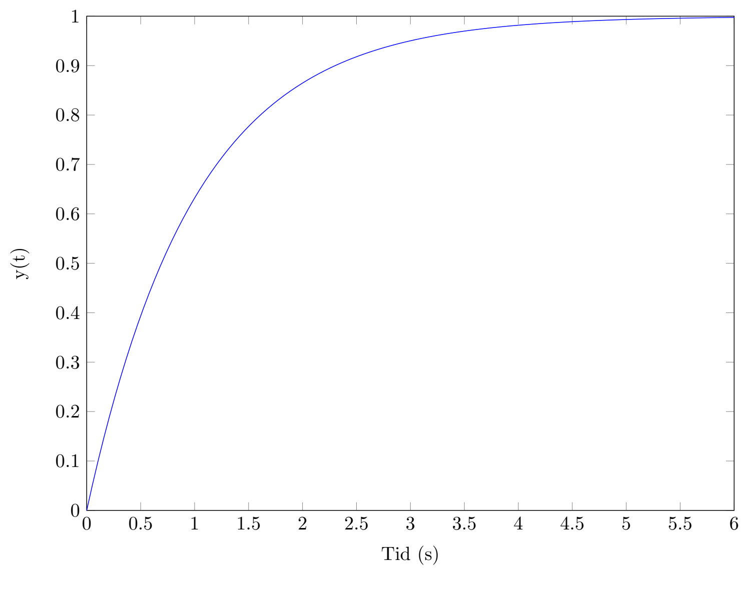
b. Impulssvaret $Y(s)$ ges av

$$Y(s) = G(s) \cdot 1 = \frac{1}{s(s+1)}.$$

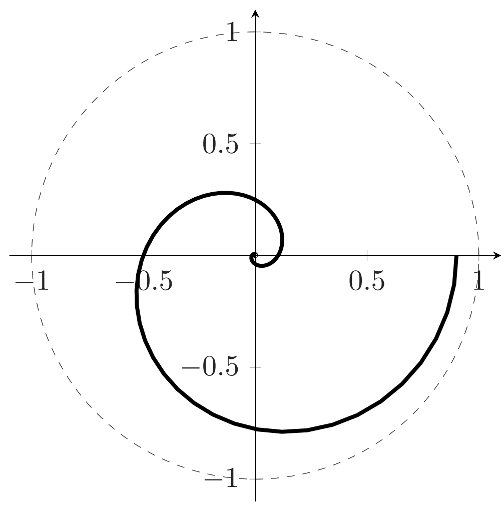
Invers laplacetransform ger sedan impulssvaret $y(t)$ som

$$y(t) = 1 - e^{-t},$$

se Figur 1.



Figur 1 Skiss av impulssvaret $y(t)$ i Problem 1.



Figur 2 Nyquistdiagram för processen i Problem 2

2. I Figur 2 visas Nyquistdiagrammet för en krets. Svara på vart och ett av påståendena nedan med sant eller falskt. Glöm inte att motivera ditt svar!

a. Kretsen innehåller en integrator.

b. Kretsen innehåller en derivator.

c. Det slutna systemet kommer vara stabilt oavsett ytterligare tidsfördröjningar i loopen.

d. Vi vill reglera med en P-regulator. Det slutna systemet kommer vara stabilt oavsett regulatorns förstärkning. (2 p)

Solution

a. Falskt. För ett system med en integrator ska vi ha att $\lim_{s\to 0} |G(s)| \to \infty$.

b. Falskt. För ett system med en derivator ska vi ha att $\lim_{s\to 0} |G(s)| = 0$.

c. Sant. Då ingen frekvens har förstärkning > 1 kan ingen fasvridning få Nyqvistkurvan att passera utanför -1.

d. Falskt. Regulatorförstärkning på $K > 2$ gör att Nyquistkurvan passerar utanför -1 och ger ett instabilt slutet system.

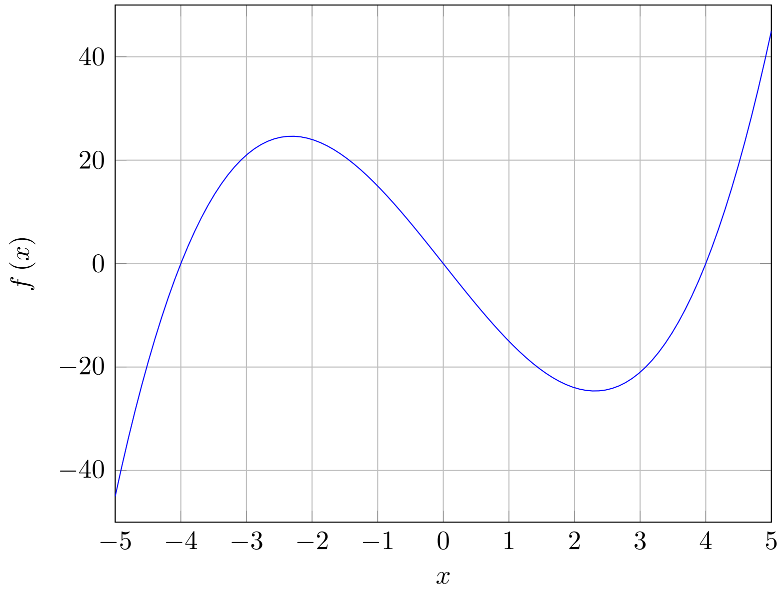
3. Ett olinjärt system är definierat på tillståndsform enligt nedan

$$\dot{x} = f(x)$$
$$y = 2x^2 + x$$

med $f(x)$ enligt Figur 3.

a. Bestäm alla stationära punkter i intervallet $x \in$ [-5, 5]. (0.5 p)

b. Linjärisera systemet kring den punkt som resulterar i ett asymptotiskt stabilt system. (1.5 p)



Figur 3 Högerledet $f(x)$ i Problem 3.

Solution

a. De stationära punkterna ges av $f(x) = 0$, vilka avläses till -4, 0, och 4.

b. Linjäriseringen i en stationär punkt x_0 ges av

$$\Delta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\,\Delta x$$
$$\Delta y = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0)\,\Delta x$$

För att linjäriseringen ska resultera i ett asymptotiskt stabilt system gäller

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) < 0$$

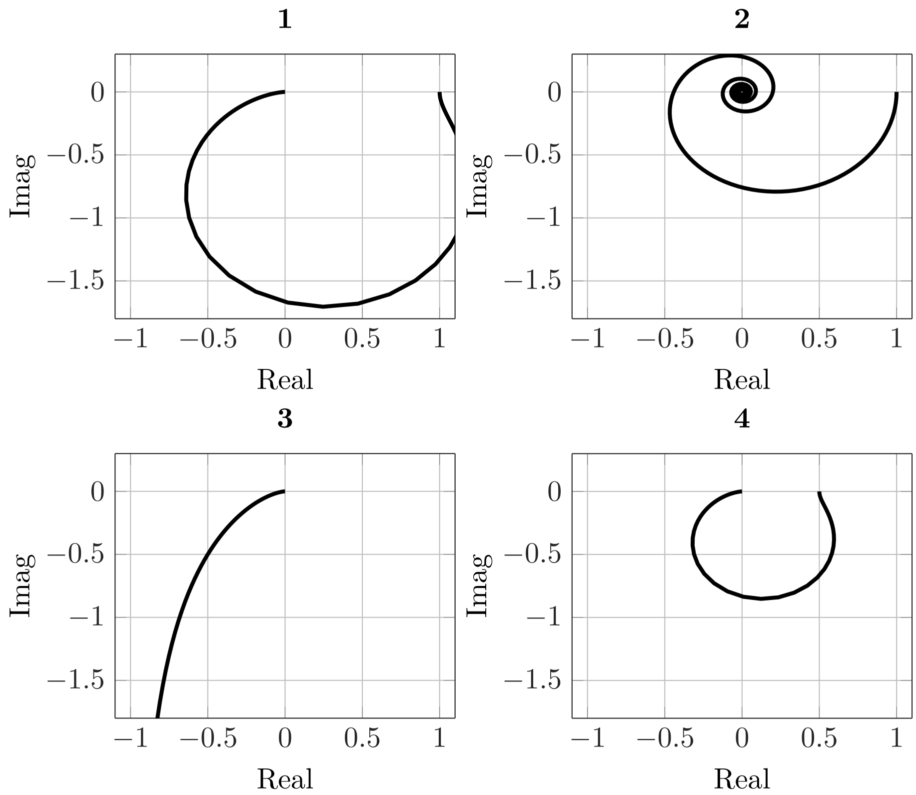
vilket endast håller för lutningen på $f(x)$ i punkten $x_0 = 0$. Den här lutningen kan avläsas till att vara -15, vilket resulterar i det linjäriserade systemet

$$\Delta\dot{x} = -15\Delta x$$
$$\Delta y = \Delta x$$

4. Figur 4 visar Nyquistdiagrammen för ett antal system med kretsöverföringsfunktion $G_0(s)$. I Figur 5 visas svaren på ett enhetssteg, samt dess stationära värde, från samma system när de återkopplats enkelt, alltså som $\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$. Para ihop Nyquistdiagrammen 1–4 med enhetsstegsvaren A-D och glöm inte att motivera dina svar! (2 p)

Solution

Tidsfördröjningar ger linjärt minskande fasbidrag med ökande frekvens och ger därför en spiral i Nyquistdiagrammet. Nyquistdiagram 2 och stegsvar A är de enda med tidsfördröjning och måste därför höra ihop.



Figur 4 Nyquistdiagram fyra system

Nyquistdiagram 3 tycks ha en integrator då förstärkningen verkar vara oändlig och fasen -90° för låga frekvenser. Stegsvar B verkar vara det enda som kan följa enhetssteget och måste därför höra ihop med Nyquistdiagram 3. Kvar är nu stegsvar C och D och Nyquistdiagrammen 1 och 4.

Eftersom båda systemen är asymptotiskt stabila ges slutna systemets stationära förstärkning av $\frac{G(0)}{1+G(0)}$. Nyquistdiagram 1 har $G(0) \approx 1$ vilket borde ge stationär förstärkning för slutna systemet på 0.5. Detta stämmer överens med stegsvar C. Nyquistdiagram 4 har $G(0) \approx 0.5$ vilket borde ge stationär förstärkning för slutna systemet på 1/3. Detta stämmer överens med stegsvar D.

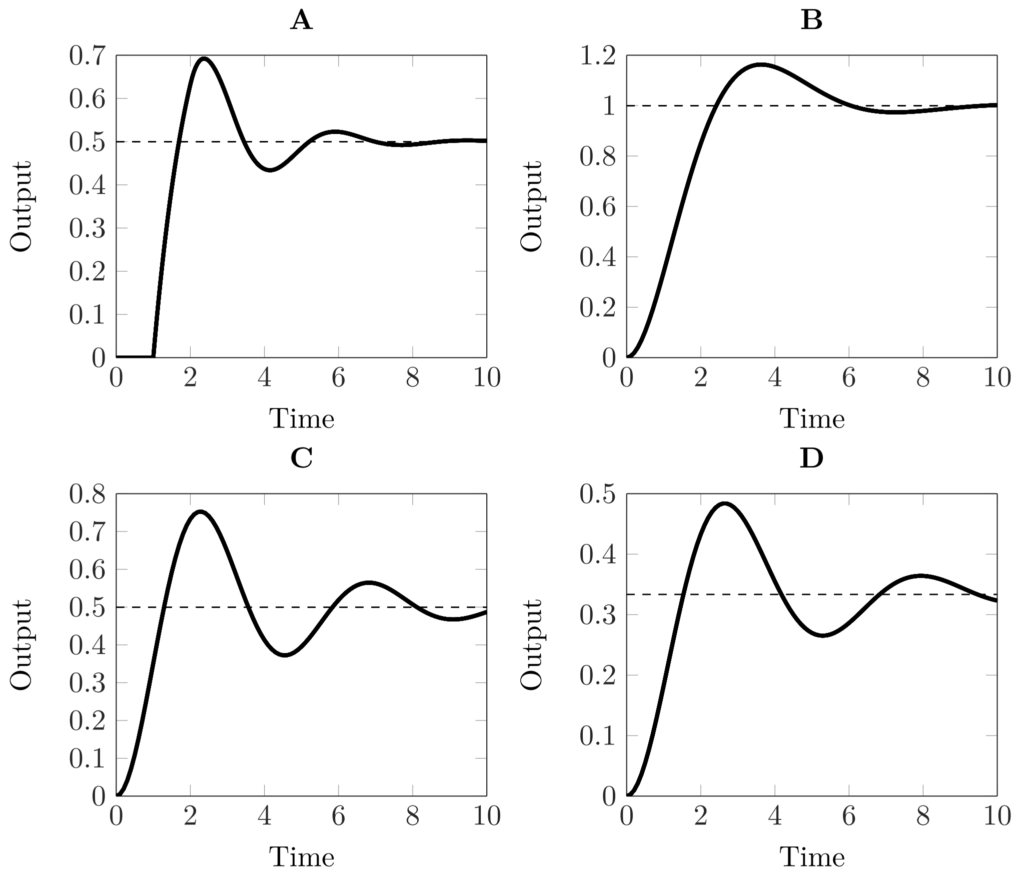
5. Vi ska designa en reglerloop som visas i Figur 6. Processen ges av de två seriekopplade överföringsfunktionerna

$$G_1(s) = \frac{1}{s+7} \quad \text{och} \quad G_2(s) = \frac{3}{s-a}.$$

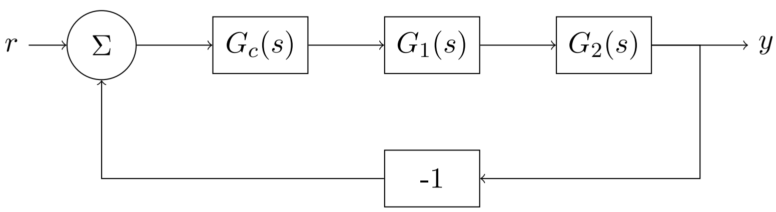
Vi ska designa regulatorn $G_c(s)$.

a. Antag att $a = 3$. Låt $G_c(s)$ vara en PD-regulator och bestäm dess parametrar så att slutna systemet har en dubbelpol i -8. (2 p)

b. Vi är inte helt säkra på värdet av parametern a i $G_2(s)$. För vilka värden på a är det slutna systemet med regulatorn från uppgift **a** asymptotiskt stabilt? (2 p)



Figur 5 Enhetsstegsvar och stationärt värde för fyra återkopplade system



Figur 6 Reglerloopen i Problem 5

Solution

a. Vi väljer regulatorns överföringsfunktion till

$$G_c(s) = K(1 + sT_d).$$

Detta ger oss kretsöverföringsfunktionen

$$G_0(s) = \frac{3K(1 + sT_d)}{(s + 7)(s - a)}$$

och det slutna systemets karateristiska polynom

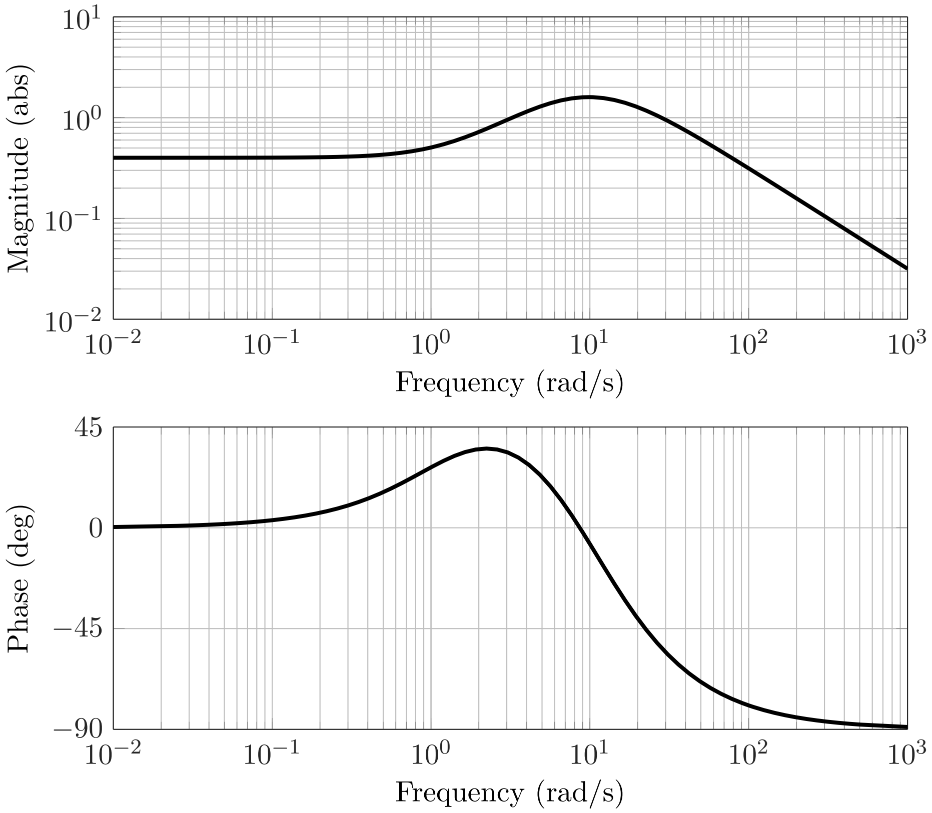
$$s^2 + (3KT_d - a + 7)s + (3K - 7a).$$

Vårt önskade polynom i det här fallet är

$$(s+8)(s+8) = s^2 + 16s + 64.$$

Matchning av koefficienterna ger att $K = (7a + 64)/3 = 85/3$ och $T_d = (a + 9)/(7a + 64) = 12/85$.

b. Vi tittar på det slutna systemets karateristiska polynom $s^2+(19-a)s+(85-7a)$. Villkoret för asymptotisk stabilitet säger att samliga koefficienter ska vara > 0. Detta är sant för s^1-koefficienten då $a < 19$ och för s^0-koefficienten då $a < 85/7 < 19$. Systemet är alltså asymptotiskt stabilt då $a < 85/7$.



Figur 7 Bodediagram för processen i Problem 6

6. En asymptotiskt stabil process har Bodediagrammet som visas i Figur 7.

a. Systemet har överföringsfunktion på formen

$$G(s) = K\frac{sT_z + 1}{(sT_p + 1)^n}.$$

Bestäm K och n. (2 p)

b. Vi matar vår process med insignalen $u(t) = 1 + \sin(t)$. Efter att transienterna har dött ut, vad blir systemets utsignal? (2 p)

Solution

a. Eftersom statiska förstärkningen för kvoten i överföringsfunktionen är 1 kan K direkt avläsas som lågfrekvensasymptoten till $K = 0.4$. Eftersom fasen går mot $-90°$ måste det vara en pol mer än nollställen $n = 1 + 1 = 2$.

b. I Bodediagrammet avläses den stationära förstärkningen till 0.4. Förstärkningen vid frekvensen 1 rad/s avläses till $a = 0.5$ och fasförskjutningen $\varphi \approx 27°$. Superpositionsprincipen ger oss utsignalen till $y(t) = 0.4 + 0.5\sin(t + 27°)$. (Eftersom sinus-komponenten inte kan sättas i relation till något kan fasen utelämnas (med motivering om varför det är ok).)

7. Ett system är definierat på tillståndsform enligt nedan

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [\,1 \quad 0\,]\, x$$

a. Bestäm systemets poler. (0.5 p)

b. Visa att systemet inte är styrbart. (1 p)

c. Designa en tillståndsåterkoppling $u = -Lx$ som placerar polerna i -1, -3. (1.5 p)

d. Visa att man vid tillståndsåterkoppling av det här systemet endast kan flytta på en av polerna från sin ursprungliga position. (1 p)

Solution

a. Polerna till systemet ges av egenvärderna till A-matrisen, som är diagonal. Polerna kan därmed direkt avläsas på diagonalen till -1, med en multiplicitet av 2.

b. Styrbarhetsmatrisen W_S beräknas enligt

$$W_S = [\,B \quad AB\,] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

och

$$\det{(W_S)} = 0$$

c. Det önskade karakteristiska polynomet ges av

$$(s+1)(s+3) = s^2 + 4s + 3$$

Systemets karakteristiska polynom ges av

$$\det{(sI - A + BL)} = s^2 + (2 + 3l_1 + l_2)\, s + 1 + 3l_1 + l_2$$

Identifiering av koefficienter ger följande ekvationssystem

$$2 + 3l_1 + l_2 = 4$$
$$1 + 3l_1 + l_2 = 3$$

med lösningar för alla par (l_1, l_2) som uppfyller

$$3l_1 + l_2 = 2$$

d. Systemets karakteristiska polynom beräknades i föregående deluppgift till

$$\det(sI - A + BL) = s^2 + (2 + 3l_1 + l_2)\, s + 1 + 3l_1 + l_2$$

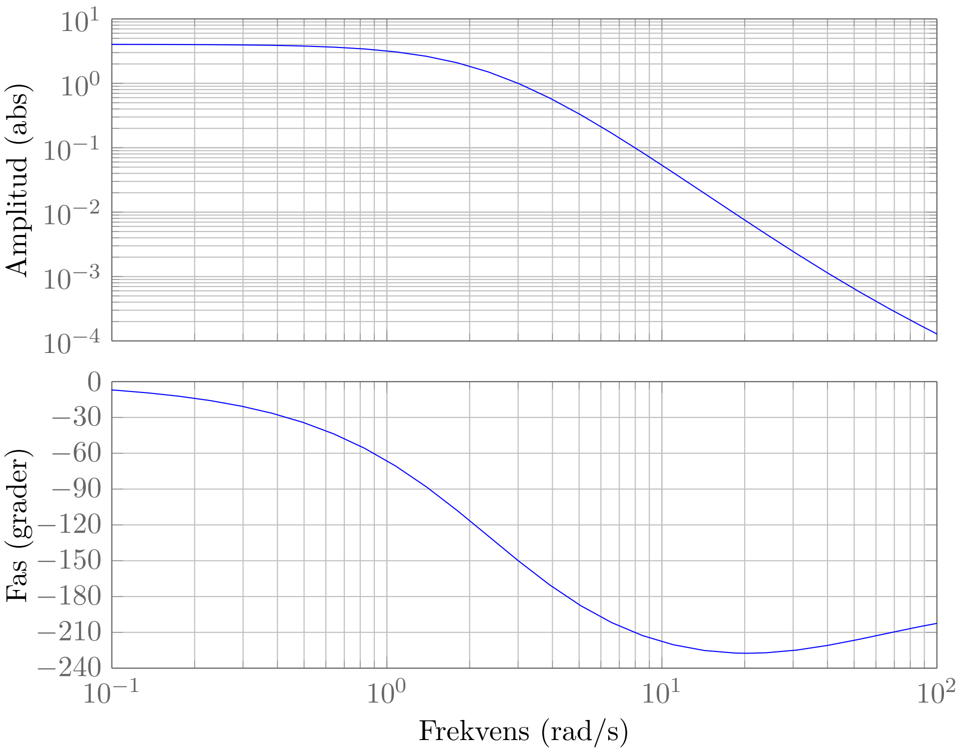
Termen $1 + 3l_1 + l_2$ förekommer alltid i båda koefficienterna, och om den sätts till en konstant a fås följande uttryck för systemets kar. polynom

$$\det(sI - A + BL) = s^2 + (a + 1)\, s + a$$

vilken kan faktoriseras enligt

$$s^2 + (a + 1)\, s + a = (s + 1)(s + a)$$

vilket visar att en av polerna alltid måste placeras i ursprungsläget $s = -1$.



Figur 8 Bodediagram för öppna systemet G_0 i Problem 8.

8. En regulator har designats för en process så att det öppna systemet G_0 har erhållits. Figur 8 visar Bodediagrammet för det öppna systemet. Vid inledande tester i ett labb uppvisar det återkopplade systemet önskvärd prestanda. När regleringen istället sker över ett nätverk med tidsfördröjningar upp till 0.35 s blir det återkopplade systemet instabilt.

a. Bekräfta, genom lämpliga avläsningar och beräkningar, att återkoppling av G_0 med en dödtid på 0.35 s ger ett instabilt system. (1 p)

b. Designa en lämplig kompenseringslänk som bibehåller systemets snabbhet och som garanterar stabilitet vid reglering över nätverket. (2 p)

c. Antag att du istället försöker lösa problemet med en Otto-Smith-regulator. Vid simuleringar med konstant tidsfördröjning på 0.35 s ser beteendet hos det återkopplade systemet bra ut. När regulatorn senare används i det riktiga nätverket noterar du lite besviket att prestandan är sämre i verkligheten. Förklara kort två möjliga orsaker. (1 p)

Solution

a. Systemets dödtidsmarginal L_M ges av

$$L_M = \frac{\varphi_m}{\omega_c}.$$

Avläsning ur Bodediagrammet ger

$$L_M == \frac{\pi/6}{3} \approx 0.175 \text{ s} < 0.35 \text{ s}.$$

b. För att garantera stabilitet krävs en dödtidsmarginal på minst 0.35 s. Eftersom snabbheten i systemet ska behållas ska skärfrekvensen fortfarande vara $\omega_c = 3$ rad/s. Med denna skärfrekvens är fasmarginalen 30°. För att åstadkomma en dödtidsmarginal på 0.35 s krävs en fasmarginal på $\varphi_m = \omega_c L_m = 3 \cdot 0.35 = 1.05$ rad (60°). Det innebär att fasmarginalen måste höjas 30°.

En fasavancerande länk designas för att åstadkomma detta. För att höja faskurvan 30° väljs $N = 3$. För att faskurvans topp ska hamna vid skärfrekvensen sätts $b = \sqrt{3}$ och för att få samma skärfrekvens som innan med dessa parametrar sätts $K_K = 1/\sqrt{3}$.

Detta ger slutligen kompenseringslänken G_K

$$G_K = \sqrt{3}\frac{s + \sqrt{3}}{s + 3\sqrt{3}}$$

c. Två möjliga orsaker är varierande tidsfördröjningar och modellfel, som båda påverkar prestandan hos Otto-Smith-regulatorn negativt.