LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 27 oktober 2015 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 2015-01-12

1. Betrakta ett system med överföringsfunktion,

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + w_0^2}.$$

a. Ange en differentialekvation för systemet (1 p)

b. Skriv systemet på tillståndsform (1 p)

Solution

a. $\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 u$

b. Inför $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & \dot{y} \end{pmatrix}$. Det ger tillståndsformen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} u \tag{1}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \tag{2}$$

2. I Figur 1 visas åtta stegsvar. Samtliga plottar har samma skala på y-axeln och x-axeln. Följande överföringsfunktioner är givna:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4\,s + 1} \qquad G_2(s) = \frac{1}{15\,s^2 + 14\,s - 1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{0.8\,s + 0.8} \qquad G_4(s) = \frac{1}{4\,s^2 + 1.6\,s + 1}$$

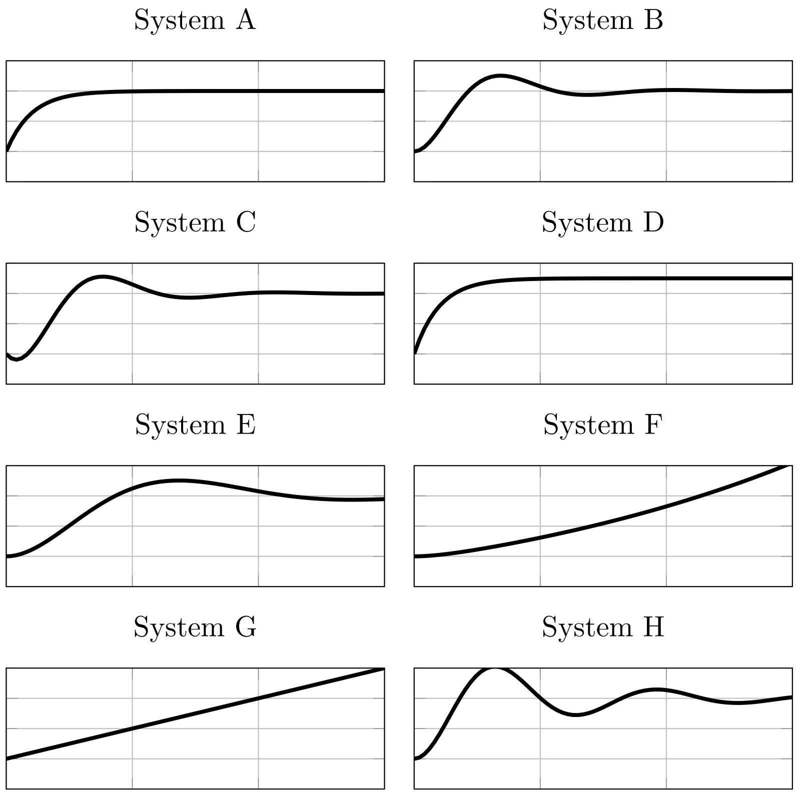
$$G_5(s) = \frac{1}{s + 1} \qquad G_6(s) = \frac{0.1}{s}$$

$$G_7(s) = \frac{1 - 0.5\,s}{s^2 + 0.8\,s + 1} \qquad G_8(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8\,s + 1}$$

Para ihop stegsvaren för systemen A-H med överföringsfunktionerna $G_1(s)$-$G_8(s)$. (4 p)

Solution

System G växer linjärt med tiden och är därför integratorn (G_6). Det andra instabila stegsvaret (F) motsvarar därför $G_2(s)$. Av de två första ordningens system har D högre statisk förstärkning och motsvarar därför $G_3(s)$, och därför motsvarar A $G_5(s)$. Av de fyra andra ordningens system har System E lägre egenfrekvens och motsvaras av $G_4(s)$, system H har lägre dämpning och motsvarar $G_1(s)$, system C har negativt initialsvar och måste därför ha ett nollställe i höger halvplan så som $G_7(s)$ och sedan är bara system B och $G_8(s)$ kvar.



Figur 1 Stegsvar till problem 2.

3. Ange sant eller falskt för påståendena i a-d och motivera varför. Poäng ges endast till svar med korrekt motivering. (2 p)

a. När en process återkopplas enkelt med en P-regulator kommer det alltid att uppstå ett stationärt fel när man gör en stegändring i börvärdet.

b. Integraltiden T_i i en PI-regulator anger den tid man integrerar reglerfelet.

c. En fasavancerande länk ger ett icke-negativt fasbidrag vid alla frekvenser.

d. När man lägger till en ren dödtid till ett system så kommer systemets skärfrekvens att sänkas.

Solution

a. Falskt. Processer som innehåller minst en integrator kommer att kunna regleras med en P-regulator utan stationärt fel vid stegändringar i börvärde.

b. Falskt. Styrsignalen u från en PI-regulator ges av:

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_{t_0}^{t} e(t)dt)$$

Där e är reglerfelet och t_0 är tidpunkten som regulatorn sattes i drift. Intervallet som PI-regulatorn integrerar reglerfelet över sträcker sig alltså från den tidpunkt som regulatorn sattes i drift till tidpunkten t. Integraltiden T_i är endast en förstärkningsfaktor som viktar I-delens bidrag till utsignalen.

c. Sant. Argumentet för en fasavancerande länk ges av:

$$\arg(K_k \frac{1+\frac{i\omega}{b}}{1+\frac{i\omega}{bN}}) = arctan(\frac{\omega}{b}) - arctan(\frac{\omega}{bN})$$

Eftersom $\omega \geq 0$ och $b > 0$, $N > 1$ och $arctan(x)$ är växande för $x \geq 0$ kommer $arctan(\frac{\omega}{b}) \geq arctan(\frac{\omega}{bN})$. Detta innebär att den fasavancerande länken kommer att ha en fas som är större än eller lika med noll.

d. Falskt. Skärfrekvensen ω_c är den frekvens där systemets förstärkning är 1, dvs $|G(i\omega_c)| = 1$. Eftersom en ren dötid inte ger något bidrag till systemets förstärkning kommer systemets skärfrekvens att vara oförändrad.

4. En kulas position z längs med en bom med vinkeln ϕ från horisontalplanet beskrivs av följande differentialekvation

$$\ddot{z}(t) = \frac{5g}{7}\sin(\phi(t))$$

där g är tyngdaccelerationen. Bommens vinkelhastighet styrs av en motor, där styrsignalen u är spänningen in till motorn. Förhållandet mellan vinkelhastigheten och spänningen in till motorn ges av:

$$\dot{\phi}(t) = 5u$$

a. Ställ upp systemet på tillståndsform, med tillstånden $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$ och $x_3 = \phi$. Antag att man mäter kulans position, och att man låter spänningen in till motorn vara insignal. (1 p)

b. Linjärisera systemet kring den stationära punkt där $\phi^0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ och $z^0 = 0$, och skriv tillståndsekvationerna på matrisform. (1 p)

c. Är systemet styrbart? Motivera! (1 p)

d. Man bestämmer sig för att styra kulans position på bommen med hjälp av tillståndsåterkoppling. Antag att man har tillgång till samtliga tillstånd i processen och designa en styrlag $u = -Lx = -l_1x_1 - l_2x_2 - l_3x_3$ som ger ett slutet system med poler placerade i -5, -5+5i samt -5-5i. (2 p)

e. Det visar sig att trots att man har gjort en polplacering som ska ge asymptotisk stabilitet så blir systemet instabilt när bommen gör stora vinkelutslag. Varför stämmer inte analysen vid stora vinkelutslag? (1 p)

Solution

a. Systemet på tillståndsform blir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \frac{5g}{7}\sin(x_3)\\ \dot{x}_3 &= 5u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

b. I stationäritet gäller $\dot{x}_k = 0$. Detta tillsammans med kravet $z = 0$ ger de stationära punkterna:

$$
\begin{aligned}
x_1^0 &= 0 \\
x_2^0 &= 0 \\
x_3^0 &= k\pi \qquad\qquad\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2... \\
u^0 &= 0
\end{aligned}
$$

Det är endast punkten där $x_3^0 = 0$ som kravet att $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ uppfylls, alltså är $[x_1^0, x_2^0, x_3^0, u^0] = [0, 0, 0, 0]$. Linjärisering kring denna punkt ger följande system:

$$
\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5g}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} u
$$

$$
y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x
$$

c. Systemets styrbarhetsmatris:

$$
W_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{25g}{7} \\ 0 & \frac{25g}{7} & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Den har rang 3, och systemet är alltså styrbart.

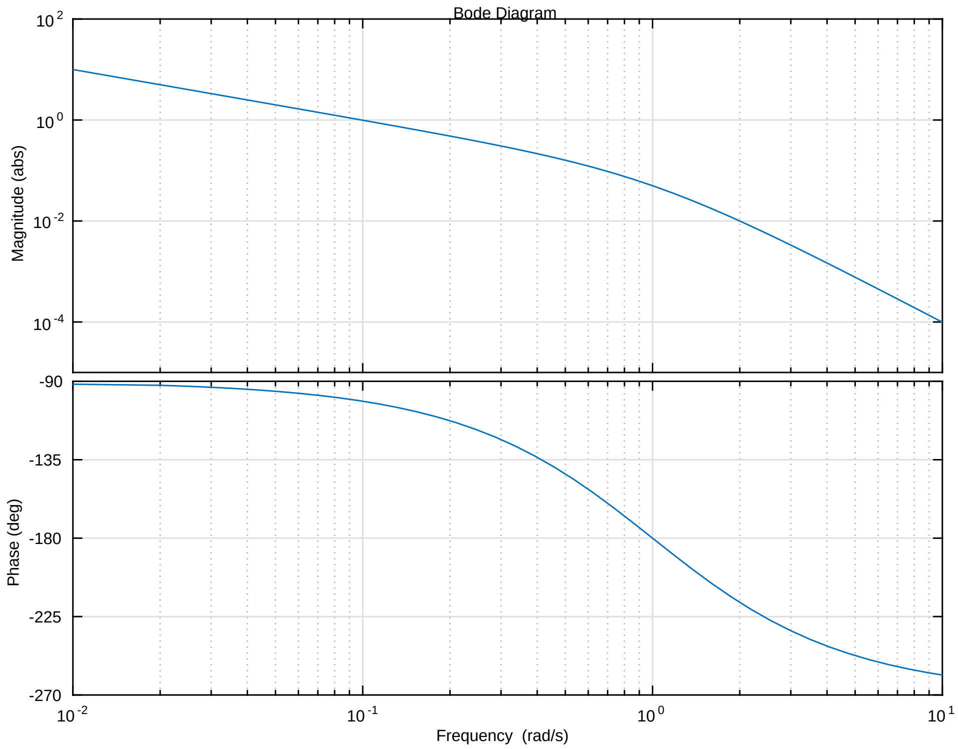
d. Med tillståndsåterkoppling ges det slutna systemets poler av egenvärdena till matrisen (A - BL). Det karaktäristiska polynomet är:

$$
\det(sI - A + BL) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -\frac{5g}{7} \\ 5l_1 & 5l_2 & s + 5l_3 \end{vmatrix} = s^3 + 5l_3 s^2 + \frac{25g}{7} l_2 s + \frac{25g}{7} l_1
$$

Jämförelse med det önskade nämnarpolynomet $(s+5)(s+5+5i)(s+5-5i) = (s+5)(s^2+10s+50) = s^3 + 15s^2 + 100s + 250$ ger:

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \frac{250 \cdot 7}{25g} = \frac{70}{g} \\
l_2 &= \frac{100 \cdot 7}{25g} = \frac{28}{g} \\
l_3 &= 3
\end{aligned}
$$

e. Vid linjäriseringen har man gjort approximationen att $\sin(\phi(t)) \approx \phi(t)$ för små vinklar, dvs då $\phi(t) \approx 0$. Därför gäller stabilitetsanalysen endast i dessa fall, och man kan inte använda den linjäriserade modellen för att dra några slutsatser om systemets beteende för stora avvikelser från linjäriseringspunkten.



Figur 2 Bodediagram för systemet i problem 5.

5. Det skattade bodediagrammet för ett system visas i figur 3. Vi vill göra systemet 10 gånger snabbare samtidigt som fasmarginalen inte får minska med mer än hälften. Vidare får det inte finnas något stationärfel vid ett steg i referenssignalen. Designa en regulator som uppfyller allt detta. (3 p)

Solution

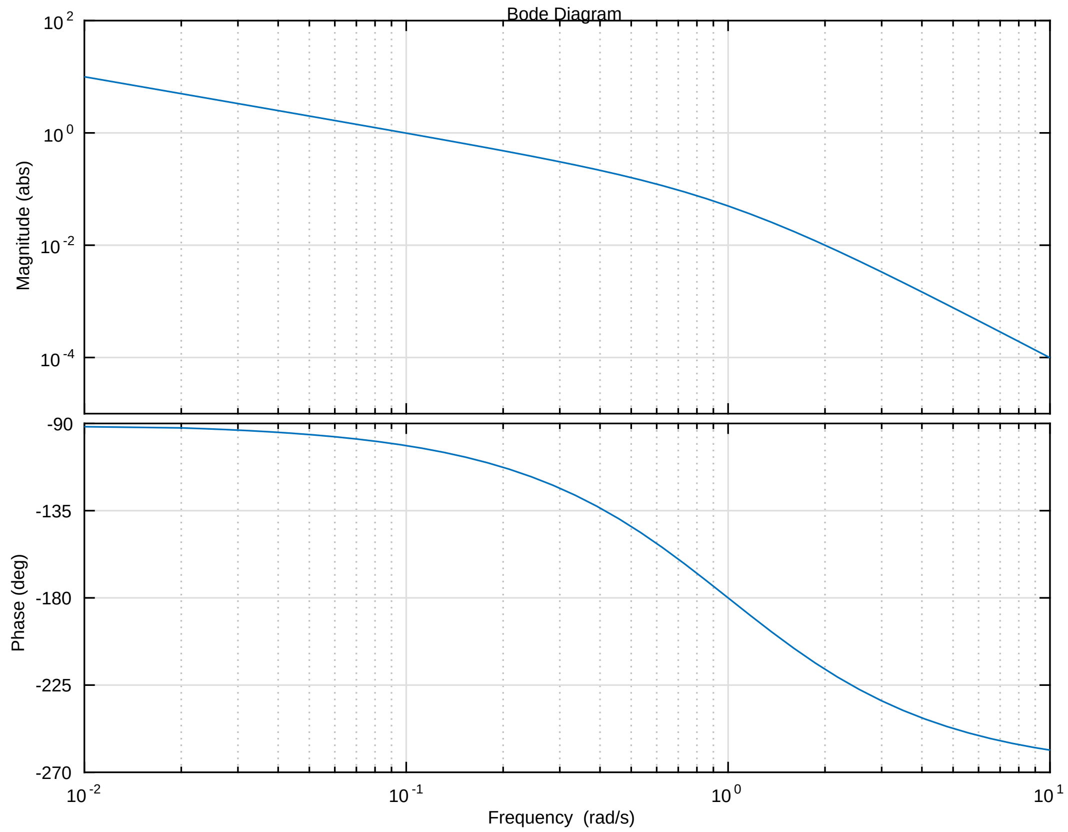
Man ser i bodediagrammet att skärfrekvensen ligger vid $\omega_c = 0.1$ och att $\varphi_m = 80°$. Vid $\omega = 1$ är $\varphi_m = 0°$. Inför en fasavancerande länk

$$G_K(s) = K_K \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)} \tag{3}$$

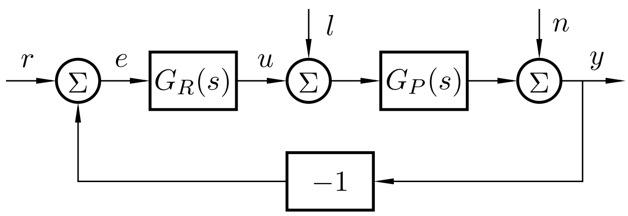
För att få en fasmarginal på $40°$ vid $\omega = 1$ väljer vi $N = 4.8$ vilket leder till $b = 1/\sqrt{4.8} = 0.46$. För att få rätt förstärkningen väljer vi

$$K_K\sqrt{4.8}\,|G_P(i\omega)| = K_K 0.05\sqrt{4.8} = K_K 0.11 = 1 \Rightarrow K_K = 9.09.$$

Slutligen så inser man att stationärfelet vid ett referenssteg kommer att vara noll eftersom processen verkar innehålla en integrator, vilket man ser på lutningen på lågfrekvensasymptoten i bodediagrammet.



Figur 3 Bodediagram för systemet i problem 5.



Figur 4 Systemet i problem 6.

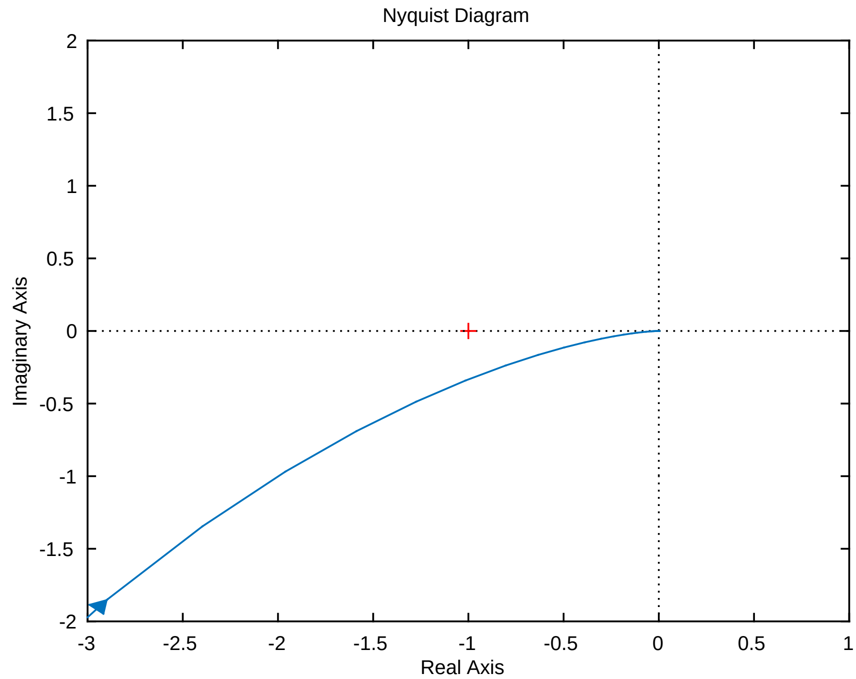
6. Betrakta systemet i figur 4. Kom ihåg definitionen av känslighetsfunktionen

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_R(s)G_P(s)}.$$

a. Antag att $r(t) = 0$. Visa att känslighetsfunktionen kan tolkas som hur mycket en återkoppling påverkar inverkan av störningarna L och N på mätsignalen Y. (2 p)

b. I figur 5 visas ett Nyquistdiagram för $G_o = G_p G_R$. Rita en figur som visar för vilka frekvenser (alltså vart i diagrammet) som störningar förstärks efter återkoppling. Var noga med att markera axlarna. (2 p)

Solution



Figur 5 Nyquistplot för problem 6

a. $Y_{cl} = SN + G_p SL$ och $Y_{ol} = N + G_p L$ ger

$$\frac{Y_{cl}}{Y_{ol}} = S. \tag{4}$$

Eftersom det inte finns någon referenssignal visar alltså S hur mycket störningar förstärks efter återkoppling.

b. Störningarna förstärks då

$$\left| \frac{1}{1 + G_R G_P} \right| > 1 \Leftrightarrow |1 + G_R G_P| < 1, \tag{5}$$

vilket är den del av $G_o = G_P G_R$ som ligger inom en cirkel med mittpunkt i -1 och med radien 1. Se figur 6.

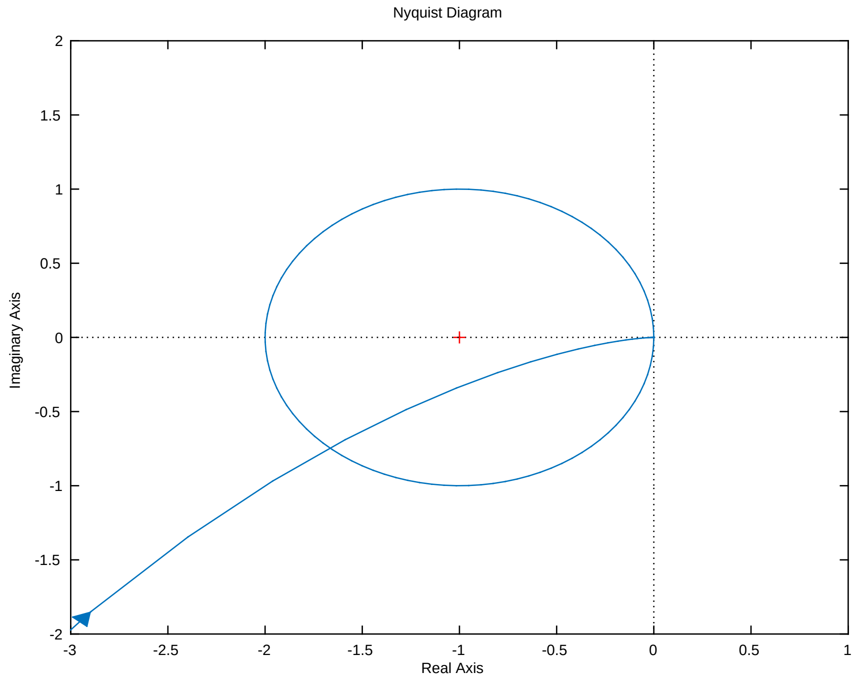
7. En servomotor med överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{1}{s(0.025\, s + 1)}$$

ska regleras.

a. Bestäm en P-regulator (med överföringsfunktion $G_c(s) = K$) för att det slutna systemet ska ha en reell dubbelpol. (2 p)

b. I själva verket ska regulatorn och servomotorn befinna sig på geografiskt olika platser. Vi vill styra processen över Internet och ska investera i en uppkoppling mellan de två platserna. I tabellen nedan visas de alternativ till uppkoppling vi har, deras typiska tvåvägsfördröjning (Process $\rightarrow$ Regulator $\rightarrow$ Process) och hur mycket de kostar:



Figur 6 Nyquistplot med lösningscirkel för problem 6.

Uppkopplingstyp	Typisk fördröjning	Kostnad
GPRS	500 ms	$
3G	150 ms	$$
LTE	50 ms	$$$
Fiber	10 ms	$$$$

Motivera utifrån process, regulator och tabellen ovan vilken uppkopplingstyp vi behöver för att det återkopplade systemet från deluppgift **a** ska vara stabilt, trots kommunikationsfördröjningen. Vi vill så klart inte betala mer än nödvändigt.

(2 p)

Solution

a. Slutna systemets karatäristiska ekvation ges av

$$s^2 + 40s + 40K = 0.$$

Lösningarna till denna är

$$s = -20 \pm \sqrt{400 - 40K}$$

och vi har dubbelpol i $s = -20$ då $400 - 40K = 0$ alltså ska $K = 10$.

b. För att ta reda på hur lång fördröjning vi kan tolerera beräknar vi kretsöverföringsfunktionens dödtidsmarginal. Den ges av $L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c}$ där ϕ_m är fasmarginalen och ω_c är skärfrekvensen. Skärfrekvensen ges av $|G_0(i\omega_c)| = 1$

och blir $\omega_c = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{0.05} \approx 9.72$ rad/s. Fasmarginalen ges sedan av $\phi_m = \pi + \arg(G_0(i\omega_c)) = \pi - \arg(i\omega - 0.025\,\omega^2) \approx 1.332$ rad. Dödtidsmarginalen blir i det här fallet $L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} \approx 137$ ms.

GPRS och 3G duger alltså inte, utan den billigaste uppkopplingstypen som gör det slutna system stabilt är LTE.